Manfred Burghardt

Mehrstufige Prozesse

Allgemeine Hochschulreife
in den Bereichen Erziehung und Soziales

Version 2013/2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einstufige Prozesse und ihre Modellierung durch Matrizen und Vektoren

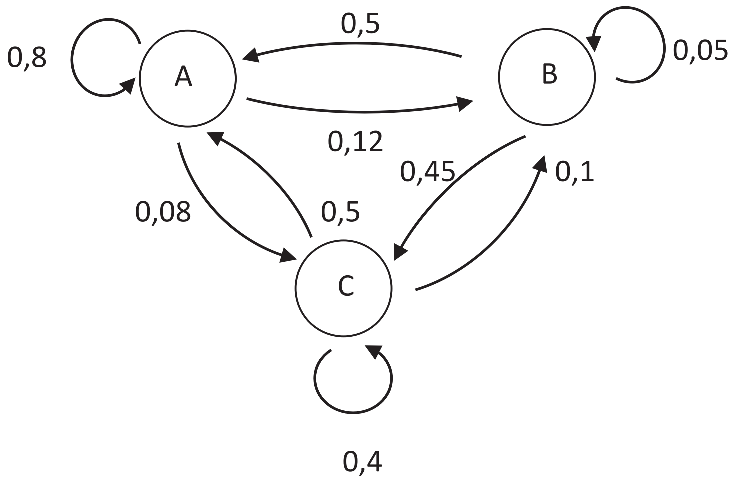
1.1 Situationsbeschreibung: Rent-a-Bike

citybike-Station in Wien

Aus Gründen des Umweltschutzes – und um dem Verkehrsinfarkt zu entkommen – steigen zunehmend mehr Menschen vom Auto auf öffentliche Verkehrsmittel oder das Fahrrad um. Viele Städte – wie zum Beispiel die österreichische Hauptstadt Wien mit ihrem citybike-Programm – unterstützen dies, indem sie die Möglichkeit anbieten, Fahrräder stundenweise anzumieten. Dabei können die Räder an einer Station angemietet, eine gewisse Zeit genutzt und dann an dieser oder einer anderen Station zurückgegeben werden.

Hierbei muss der Betreiber des Verleihsystems natürlich im Auge behalten, wie viele Fahrräder an den verschiedenen Leihstationen vorhanden sind: Es könnte sich zum Beispiel eine Situation einstellen, bei der eine Station keine Fahrräder mehr anbieten kann, während sich an einer anderen die Fahrräder stapeln.

Eine mittelgroße Stadt im Rheinland betreibt seit dem Frühjahr ein derartiges Rent-a-Bike-System mit drei Stationen. Station A befindet sich am Bahnhof, Station B am Rathaus und Station C am Stadtwald, einem oft genutzten Naherholungsgebiet. Durch Langzeitbeobachtung haben die für das Verleihsystem zuständigen Mitarbeiter ermittelt, wie sich die Verteilung der Fahrräder an den verschiedenen Stationen im Verlauf eines Tages ändert. Dazu haben Sie über zwei Monaten hinweg für jedes Fahrrad festgehalten, an welcher Station sich das Rad bei der Öffnung der Stationen um 7 Uhr und bei der Schließung der Stationen um 21 Uhr befand. Die relativen Häufigkeiten eines Transfers im Lauf eines Tages haben Sie in Form eines Graphen dargestellt:



Der Graph ist so zu interpretieren: Befindet sich ein bestimmtes Fahrrad bei Öffnung der Station in Station A (Bahnhof), so ist es

- mit einer relativen Häufigkeit von 0,8 (also in 80 % aller Fälle) bei Schließung der Station wieder in Station A,
- mit einer relativen Häufigkeit von 0,12 (also in 12 % aller Fälle) in Station B (Rathaus)
- und mit einer relativen Häufigkeit von 0,08 (also in 8 % aller Fälle) in Station C (Stadtwald).

Anstatt von relativen Häufigkeiten spricht man auch oft von „Wahrscheinlichkeiten". Ohne bei der Behandlung mehrstufiger Prozesse genauer auf die Klärung dieses Begriffs einzugehen, wollen wir dies auch im Folgenden tun.

1.2 Gozintograph, Übergangsmatrix und Verteilungsvektor

Eine graphische Darstellung wie die eben vorgestellte, nennt man in der Mathematik auch **Gozintograph** (nach dem fiktiven italienischen Mathematiker Zepartzat Gozinto: the part that goes into). Er besteht aus **Knoten** – in unserem Fall sind sie mit A, B bzw. C bezeichnet und entsprechen den Verleihstationen – und **gerichteten Kanten** zwischen diesen Knoten. Eine gerichtete Kante in einem Graphen ist eine Verbindung zweier Knoten, die (wie eine Einbahnstraße) nur in einer Richtung durchquert werden darf. Durch eine Pfeilspitze ist die zulässige Richtung angegeben.

Definition. (Zustände und Übergangswahrscheinlichkeiten)
1. Die Knoten des Gozintographen heißen auch **Zustände**.
2. Die relativen Häufigkeiten/ Wahrscheinlichkeiten an den gerichteten Kanten heißen **Übergangswahrscheinlichkeiten**.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten geben also an, in wie viel Prozent der Fälle ein Objekt, das sich in einem bestimmten Zustand befindet, in einen anderen oder den gleichen Zustand übergeht.

Wenn die Betreiber des Verleihsystems auf der Basis der gefundenen Übergangswahrscheinlichkeiten berechnen wollen, wie viele Fahrräder sich nach einem Tag an den einzelnen Stationen befinden, ist die Darstellung als Gozintograph unzweckmäßig. Hierfür bietet sich eine sogenannte Übergangsmatrix an, in der nur die Übergangswahrscheinlichkeiten vermerkt sind:

$$\begin{array}{cc} & \text{von} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{nach}\; \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Oft – und insbesondere beim Rechnen – werden wir die Beschreibung „von… nach…" weglassen und nur die „Matrix"

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

notieren.

Definition. (Matrix)
1. Eine **Matrix** (Mehrzahl: Matrizen) ist ein rechteckiges Schema von tabellarisch angeordneten Zahlen. Diese Zahlen werden wir auch die **Einträge** der Matrix nennen. Besteht eine Matrix aus m Zeilen und n Spalten, spricht man auch von einer $m\times n$-Matrix.
2. Eine **stochastische Matrix** ist eine quadratische Matrix, in der keine negativen Zahlen vorkommen, und die Summe der Zahlen in jeder Spalte den Wert 1 ergibt.

Matrizen werden wir in der Regel durch große Buchstaben kennzeichnen, zum Beispiel

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist offenbar eine stochastische Matrix.

Die Stadtverwaltung hat für ihr Rent-a-Bike-Projekt 100 Fahrräder angeschafft, die sich auf die verschiedenen Stationen verteilen. An einem Morgen befinden sich vor Öffnung der Stationen in Station A 50 Fahrräder, in Station B 40 und in Station C 10 Fahrräder. Ähnlich wie die Übergangswahrscheinlichkeiten in einer Übergangsmatrix übersichtlich notiert werden können, können auch diese Werte in einer speziellen Matrix zusammengestellt werden, indem sie in der Reihe der Zustände A, B und C untereinander notiert werden: $\begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Eine solche Matrix mit nur einer Spalte hat einen speziellen Namen:

Definition. (Vektor/ Verteilungsvektor)
1. Eine Matrix, die nur eine einzige Spalte hat, nennt man auch **Vektor**. Die Einträge eines Vektors nennen wir auch seine **Komponenten**.
2. Sind alle Komponenten des Vektors nicht negativ, nennen wir den Vektor auch **Verteilungsvektor**. Ein Verteilungsvektor, bei dem die Summe der Komponenten den Wert 1 ergibt, nennen wir **stochastischen Verteilungsvektor**.
3. Mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Menge aller Vektoren, die genau n Komponenten haben.

Vektoren werden in der Regel durch kleine Buchstaben, meist vom Ende des Alphabets, die traditionell mit einem Pfeil versehen sind, gekennzeichnet, z.B.

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten eines stochastischen Verteilungsvektors geben an, welcher Anteil aller Objekte sich in den verschiedenen Zuständen befinden.

1.3 Multiplizieren von Matrizen und Vektoren

Wie viele Fahrräder werden sich am Abend wohl in Station B befinden?

- Aus Station A werden 12 % der zu Beginn dort befindlichen Fahrräder nach Station C gelangen. Dies sind $0{,}12 \cdot 50 = 6$ Fahrräder.
- Von den 40 Fahrrädern, die in B stationiert sind, werden sich am Abend 5 % wieder (oder immer noch) hier befinden. Dies sind $0{,}05 \cdot 40 = 2$ Fahrräder.
- Von den 10 Fahrrädern bei Station C finden im Lauf des Tages 10 % ihren Weg zu Station B finden. Das ist $0{,}1 \cdot 10 = 1$ Fahrrad.

Insgesamt befinden sich also $0{,}12 \cdot 50 + 0{,}05 \cdot 40 + 0{,}1 \cdot 10 = 9$ Fahrräder in Station B. Es fällt auf: Der Wert ergibt sich, wenn man die erste Zahl in der zweiten Zeile der Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

mit der ersten Zahl des Verteilungsvektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$ multipliziert, die zweite Zahl dieser Zeile mit der zweiten Zahl des Verteilungsvektors und auch die dritte Zahl dieser Zeile mit der dritten Zahl des Verteilungsvektors multipliziert und die Produkte alle addiert.

Genauso erhält man die Anzahl der Fahrräder

- in Station A, indem man statt mit der zweiten mit der ersten Zeile der Übergangsmatrix rechnet: $0{,}8 \cdot 50 + 0{,}5 \cdot 40 + 0{,}5 \cdot 10 = 65$
- und in Station C, wobei man mit der dritten Zeile arbeitet: $0{,}08 \cdot 50 + 0{,}45 \cdot 40 + 0{,}4 \cdot 10 = 26$.

Die neue Verteilung der Fahrräder wird erneut als Vektor dargestellt: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 65 \\ 9 \\ 26 \end{pmatrix}$. Dieses Verfahren, aus einer Matrix und einem Vektor einen neuen Vektor zu gewinnen, bezeichnet man auch als **Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor**. Man schreibt deshalb

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 9 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Da wir mit dem Verteilungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$ beginnen, wollen wir diesen auch **Startvektor** nennen.

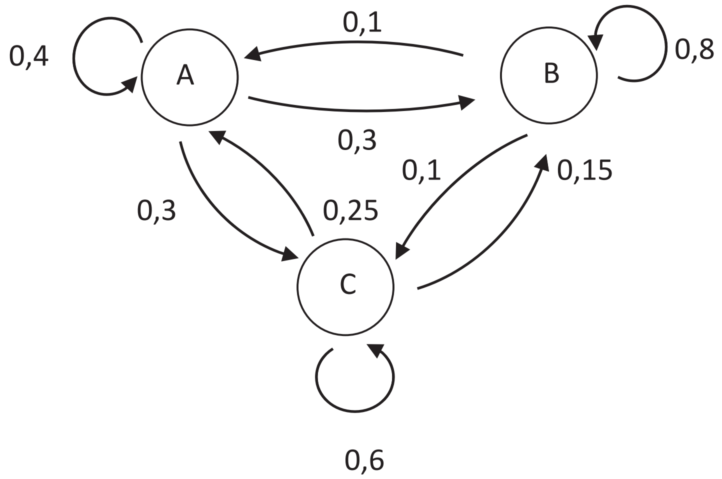
Wir halten unser Ergebnis allgemein fest:

Satz. (Berechnung der Verteilung bei einstufigen Prozessen). Ist die Verteilung von Objekten auf verschiedene Zustände durch einen Verteilungsvektor $\vec{x}$ festgelegt und sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen durch eine Übergangsmatrix A gegeben, so erhält man den Verteilungsvektor $\vec{y}$ für die neue Verteilung der Objekte, indem man die Übergangsmatrix A mit dem Startvektor $\vec{x}$ multipliziert: $\vec{y} = A\vec{x}$.

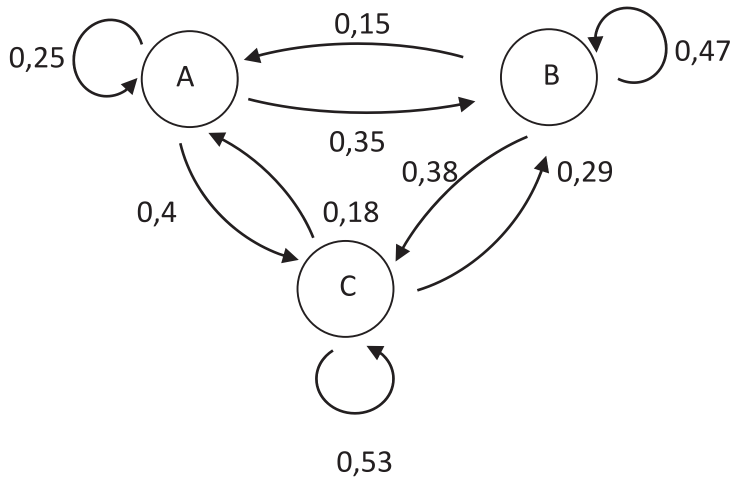
1.4 Übungen

1.4.1 Bestimmen Sie aus den folgenden Gozintographen jeweils die Übergangsmatrix.

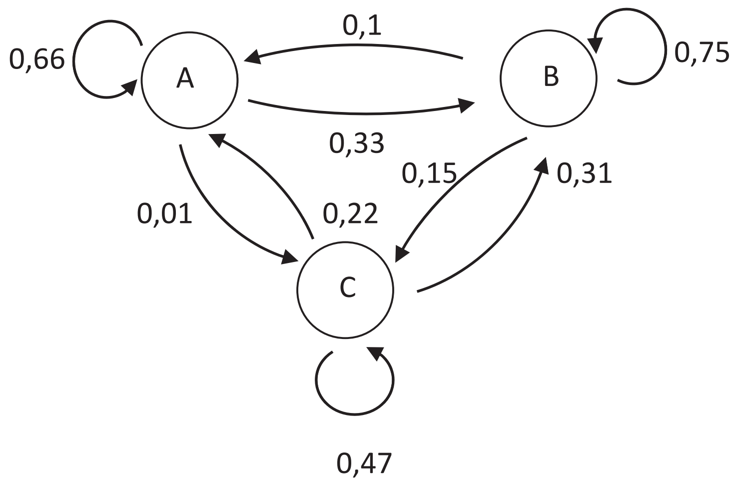
a)



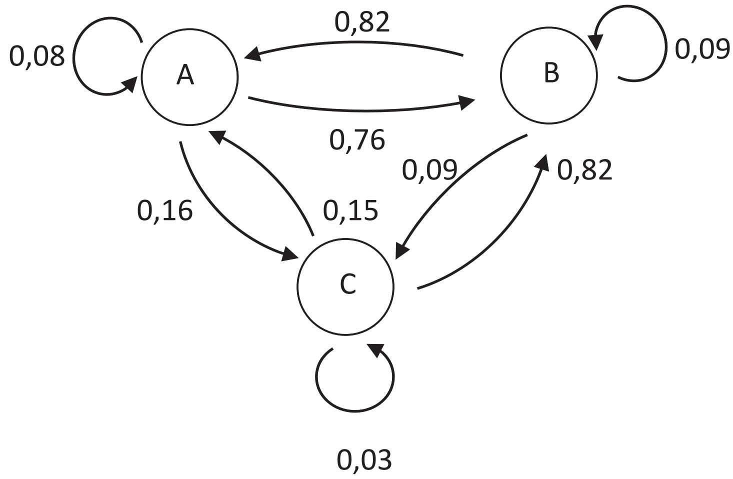
b)



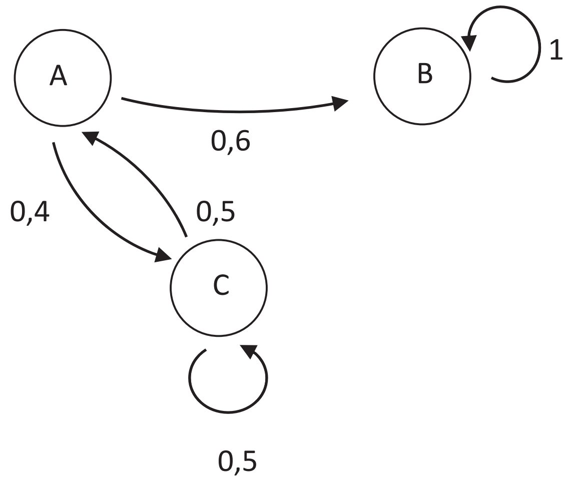
c)



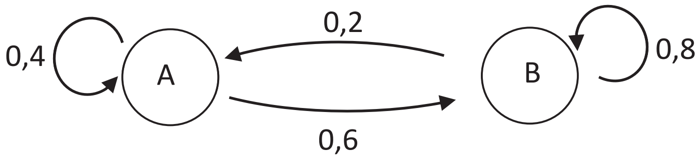
d)



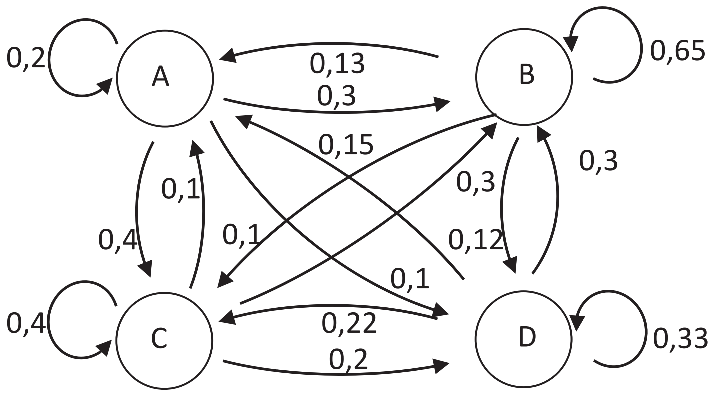
e)



f)



g)



1.4.2 Stellen Sie die durch die folgenden Matrizen A gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten in Form eines Gozintographen dar.

a) $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 0,3 \\ 0,65 & 0,4 & 0,23 \\ 0,2 & 0,48 & 0,47 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,45 & 0,71 \\ 0,69 & 0,45 & 0,06 \\ 0,21 & 0,1 & 0,23 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 1 \\ 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,3 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

h) $A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,27 \\ 0,15 & 0,1 & 0,4 & 0,38 \\ 0,45 & 0,3 & 0,2 & 0,32 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,03 \end{pmatrix}$

i) $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,15 & 0,25 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 & 1 \\ 0,5 & 0,15 & 0,45 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

j) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.4.3 Ergänzen Sie zu stochastischen Matrizen.

a) $A=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,7 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \\ ? & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} ? & 0,45 & 0,2 \\ 0,8 & 0,15 & ? \\ 0,1 & ? & 0,4 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} ? & 0,6 & 0,35 \\ 0,3 & 0,15 & ? \\ 0,5 & ? & 0,25 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ 0,6 & 0,2 & 1 \\ 0,1 & 0,4 & ? \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ 1 & 1 & 1 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$

f) $A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ ? & ? \end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix} ? & ? \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

h) $A=\begin{pmatrix} 0,4 & ? & ? & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 0,6 \\ ? & 0,25 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,15 & 0,3 & ? \end{pmatrix}$

i) $A=\begin{pmatrix} 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0,3 & 1 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & ? & 0,8 \\ ? & 0,1 & ? & ? \end{pmatrix}$

j) $A=\begin{pmatrix} ? & 0 & 0 & 1 \\ ? & ? & 0 & ? \\ ? & 0 & ? & ? \\ 1 & 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$

1.4.4 Berechnen Sie die folgenden Produkte.

a) $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & -0,4 \\ -0,6 & 0,4 & -0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & -1 \\ 3 & 1,5 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 1,5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0,2 & 5,8 & 0 & 6 \\ -0,1 & -3 & 0 & -4 \\ 1,8 & 1,9 & -1 & 0 \\ 5,3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -0,1 & 4 & 2,3 & 6,8 \\ 0,2 & 0 & 10 & 1 \\ 1,5 & 1,5 & -4 & -1 \\ 2,8 & -3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} -0,1 & 4 & 2,3 & 6,8 \\ 0,2 & 0 & 10 & 1 \\ 1,5 & 1,5 & -4 & -1 \\ 2,8 & -3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.4.5 Um die Lärm- und Abgasbelastung in ihrer Stadt zu verringern und gleichzeitig die Fitness ihrer Bürger zu fördern unterhält eine Stadt drei Stationen A, B und C, an denen sich die Bürger ab 7.00 Uhr Fahrräder ausleihen können. Ein an einer Station ausgeliehenes Fahrrad muss bis spätestens 22.00 Uhr an dieser oder einer der anderen Station wieder zurückgegeben werden. Die folgende Tabelle gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten ein Fahrrad von morgens bis abends die Station wechselt:

Station am Morgen	A	A	B	B	C	C
Station am Abend	B	C	A	C	A	B
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,4	0,3	0,1	0,2	0,5

An Station B befinden sich um 7.00 Uhr 20 % der Fahrräder und an Station C 10 % Fahrräder.

a) Erstellen Sie für die Situation den Gozintographen.
b) Geben Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor an.
c) Berechnen Sie, wie viele Fahrräder sich am Abend an jeder der Stationen befinden werden.

1.4.6 Für eine langjährige Untersuchung über das Rauchen wird eine Gruppe von 10.000 Menschen über mehrere Jahre beobachtet. Die Gruppe gliedert sich in Nichtraucher, Gelegenheitsraucher und (tägliche) Raucher. Die Wissenschaftler, die die Untersuchung durchführen, gehen davon aus, dass im Lauf eines Jahres

- von den Nichtrauchern 80 % Nichtraucher bleiben, 12 % zu Gelegenheitsrauchern und 8 % zu täglichen Rauchern werden;
- von den Gelegenheitsrauchern 35 % zu Nichtrauchern werden, 33 % Gelegenheitsraucher bleiben und 32 % tägliche Raucher werden;
- von den täglichen Rauchern 5 % zu Nichtrauchern und 10 % zu Gelegenheitsrauchern werden und 85 % tägliche Raucher bleiben.

Zu Beginn der Untersuchung besteht die Gruppe aus 7.000 Nichtrauchern, 2.000 Gelegenheitsrauchern und 1.000 täglichen Rauchern.

a) Stellen Sie die beschriebene Situation in einem Gozintographen mit drei Zuständen dar.
b) Geben Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor an.
c) Berechnen Sie, wie viele Nichtraucher, Gelegenheitsraucher und (tägliche) Raucher es nach einem Jahr geben wird.

1.4.7 In einem sehr einfachen Modell des Wetters in Bonn wird davon ausgegangen, dass ein Tag entweder regnerisch oder trocken ist, und die Wahrscheinlichkeit, nach einen regnerischen Tag einen weiteren zu haben, bei 0,66, und die Wahrscheinlichkeit, nach einem trockenen Tag einen regnerischen zu haben, bei 0,25 liegt.

a) Stellen Sie die beschriebene Situation in einem Gozintographen mit zwei Zuständen dar.
b) Geben Sie die Übergangsmatrix an.

1.4.8 Eine Population von Insekten enthält Tiere mit je einem von zwei verschiedenen Merkmalen A und B (z.B. Farbe). Beobachtungen über längere Zeit zeigen, dass Insekten mit Merkmal A zu 70 % Nachkommen mit Merkmal A haben. Insekten mit Merkmal B haben zu 20 % Nachkommen mit Merkmal A. Die Vermehrungsrate wird durch die Merkmale nicht beeinflusst.

a) Stellen Sie für die Situation den Gozintograph mit zwei Zuständen dar.
b) Geben Sie die Übergangsmatrix an.
c) Nach einer Zählung wurde für Waldgebiet ein Verhältnis von 6:4 für die Träger von Merkmal A und Merkmal B ermittelt. Berechnen Sie, welches Verhältnis sich in der F1-Generation finden wird.

1.4.9 Die Farbe (grün oder gelb) der Schoten einer Erbsenpflanze wird durch zwei Gene bestimmt, wobei das Gen G für grüne Farbe dominant und das Gen g für gelbe Farbe rezessiv ist. Damit sind folgende drei Genotypen möglich

- GG: beide Gene dominant, man spricht von reinerbig dominant
- Gg: ein Gen dominant, ein Gen rezessiv, man spricht von mischerbig
- gg: beide Gene rezessiv, man spricht von reinerbig rezessiv

Es wird nun ein *mischerbiges Elternteil* mit einer großen Population von Pflanzen beliebigen Genotyps gekreuzt. Wenn wir annehmen, dass die beiden Gene jedes der Elternteile jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf die Nachkommen vererbt werden, ergeben sich unter den Nachkommen folgende Genotypen:

Genotyp 2. Elternteil	Genotyp Nachkomme	Anteil
GG	GG	0,5
	Gg	0,5
Gg	GG	0,25
	Gg	0,5
	gg	0,25
gg	Gg	0,5
	gg	0,5

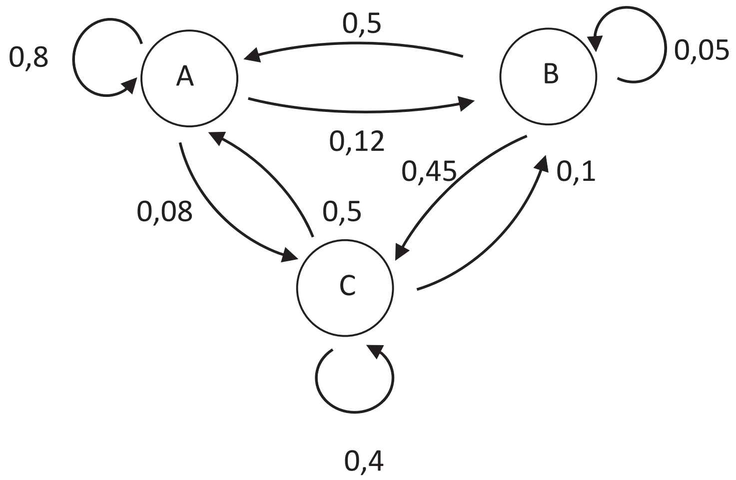
a) Stellen Sie für den Übergang „Genotyp 2. Elternteil“ $\rightarrow$ „Genotyp Nachkomme“ den Gozintographen mit den drei Zuständen GG, Gg und gg auf.
b) Geben Sie die Übergangsmatrix an.

c) In der Population, die mit den mischerbigen Pflanzen gekreuzt wurde, finden sich 20 % des Genotyps GG und 30 % des Genotyps gg. Berechnen Sie die Verteilung der Genotypen unter den Nachkommen.
d) Beweisen Sie, dass unabhängig von der Verteilung der Genotypen in der Population, die mit den mischerbigen Pflanzen gekreuzt wurde, unter den Nachkommen stets 50 % den Genotyp Gg haben.
d) Wiederholen Sie die Übungen a) bis c) unter der Voraussetzung, dass statt des mischerbigen ersten Elternteils ein reinerbig dominantes erstes Elternteil verwendet wurde. Erläutern Sie mithilfe der Übergangsmatrix, dass keine reinerbig rezessiven Nachkommen auftreten können.

2 Die Modellierung mehrstufiger Prozesse

2.1 *Situationsbeschreibung: Nochmals Rent-a-Bike*

Eine mittlere Stadt im Rheinland betreibt seit dem Frühjahr ein Rent-a-Bike-System mit drei Stationen A (Bahnhof), B (Rathaus) und C (Stadtwald), an denen sie am Morgen des ersten Öffnungstags 50, 40 bzw. 10 Fahrräder bereithält. Am Abend befindet sich jedes Fahrrad entweder an der Ursprungsstation oder an einer anderen Station, wobei die Wahrscheinlichkeiten hierfür durch den folgenden Gozintographen wiedergegeben wird:



Durch Multiplikation des Start-Verteilungsvektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit der Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix}$$

erhält man die Anzahl der Fahrräder an den verschiedenen Stationen nach der Schließung der Stationen am Abend, dargestellt in Form eines Verteilungsvektors $\vec{y}$:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 9 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir annehmen, dass im Lauf der Nacht keine Fahrräder zwischen den Stationen hin und her transportiert werden, stellt dies den Start-Verteilungsvektor für den nächsten Morgen dar. Um die Anzahl der Fahrräder am kommenden, zweiten Abend zu bestimmen, muss nun $\vec{y}$ mit der Übergangsmatrix multipliziert werden

$$A\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 65 \\ 9 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69,5 \\ 10,85 \\ 19,65 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 69 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix},$$

sodass sich nach 2 Übergängen in Station A 69, in Station B 11 und in Station C 20 Fahrräder befinden werden.

Diese Vorgehensweise, so praktisch sie auch ist, hat zwei Nachteile:

- Man bekommt keine Informationen über die relative Häufigkeit für den Übergang eines Fahrrads von einer Station zu einer anderen oder der gleichen Station *innerhalb von zwei Tagen*.
- Wählt man eine andere Startverteilung der Fahrräder, muss man wieder völlig von Anfang an rechnen.

Indem wir nur mit der Übergangsmatrix rechnen, können wir diese Nachteile ausmerzen.

2.2 Matrizenmultiplikation und Mehrschritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

Wir kehren zunächst zu unserer Rechnung

$$A\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 65 \\ 9 \\ 26 \end{pmatrix}$$

von oben zurück, und erinnern uns, dass der Verteilungsvektor $\begin{pmatrix} 65 \\ 9 \\ 26 \end{pmatrix}$ ebenfalls durch Multiplikation der Übergangsmatrix mit einem Vektor entstanden ist:

$$\begin{pmatrix} 65 \\ 9 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen dies in die letzte Gleichung ein:

$$A\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 65 \\ 9 \\ 26 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix}}_{\text{Produkt von zwei Matrizen!}} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

In der Tat kann man ein Produkt von Matrizen so definieren, dass das Produkt der beiden Übergangsmatrizen eine Übergangsmatrix ist, deren Einträge die relativen Häufigkeiten für den Übergang von einem Zustand in einen weiteren Zustand *nach zwei Übergängen* angeben.

Definition. (Matrizenmultiplikation)
Vorgegeben sind zwei Matrizen A und B, wobei die Anzahl der Spalten von A der Anzahl der Zeilen von B entspricht.
B besteht aus einer gewissen Anzahl Spalten. Diese Spalten können wir als Vektoren auffassen – man nennt sie auch die **Spaltenvektoren**. Dann können wir B in der Form

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 & \dots & \vec{b}_n \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \dots, \vec{b}_n$ die Spaltenvektoren von B sind. Das Produkt $A \cdot B$ der beiden Matrizen erhält man, indem man innerhalb der Matrix B alle Spaltenvektoren mit der Matrix A multipliziert:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & A\vec{b}_3 & \dots & A\vec{b}_n \end{pmatrix}.$$

Ist $A=B$, schreibt man auch manchmal A^2 statt $A\cdot A$ sowie A^3 statt $A\cdot A\cdot A$ und so weiter. Man spricht in diesem Fall von der zweiten, dritten, … Potenz der Matrix A

Wir erläutern die Matrizenmultiplikation am Beispiel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix}}_{B}.$$

Die Spaltenvektoren von B sind hier $\vec{b}_1=\begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,12 \\ 0,08 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{b}_2=\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,05 \\ 0,45 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3=\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{pmatrix}$. Um die Spaltenvektoren der Produktmatrix $A\cdot B$ zu bekommen, müssen diese Spaltenvektoren innerhalb von B jeweils mit der Matrix A multipliziert werden:

$$\begin{aligned} A\cdot B &= \left(\begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,12 \\ 0,08 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,05 \\ 0,45 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0,74 \\ 0,11 \\ 0,15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,1075 \\ 0,2425 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,105 \\ 0,245 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0,75 & 0,65 & 0,65 \\ 0,11 & 0,1075 & 0,105 \\ 0,15 & 0,2425 & 0,245 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Zahlen im Produkt sind die **Zweischritt-Übergangswahrscheinlichkeiten**:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{in zwei Schritten} \\ & & \text{von} \\ & & \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \text{nach} & \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,75 & 0,65 & 0,65 \\ 0,11 & 0,1075 & 0,105 \\ 0,15 & 0,2425 & 0,245 \end{pmatrix} \end{array}$$

Zum Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrrad, das sich zu Beginn in Station A befindet, nach zwei Tagen in C ist, 15 %. Wir fassen zusammen:

Satz. (Modellieren mehrstufiger Prozesse durch Matrizen und Vektoren)
Ist die Verteilung von Objekten auf verschiedene Zustände durch einen Verteilungsvektor $\vec{x}$ festgelegt und sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen durch eine Übergangsmatrix A gegeben, so erhält man den Verteilungsvektor $\vec{x}_n$ für die Verteilung der Objekte nach n Übergängen , indem man die n-te Potenz der Übergangsmatrix A mit dem Startvektor $\vec{x}$ multipliziert: $\vec{x}_n=A^n\vec{x}$.

Die Einträge der Matrix A^n sind die n**-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten**. Sie geben an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, in n Schritten von einem anderen Zustand in einen anderen oder denselben Zustand zu kommen.

2.3 *Weitere Rechenoperationen für Matrizen*

Für Matrizen gibt es – neben der Matrizenmultiplikation – weitere Rechenoperationen, die wir hier kurz vorstellen. Da Vektoren spezielle Matrizen sind, gelten die folgenden Ausführungen auch insbesondere für Vektoren.

2.3.1 Addition und Subtraktion von Matrizen und ihre Rechenregeln

Für Matrizen und Vektoren – die ja spezielle kann man neben der Multiplikation auch eine Addition und eine Subtraktion erklären. Wichtig ist dabei, dass die Matrizen, die addiert bzw. subtrahiert werden, die gleich viele Spalten und gleich viele Zeilen haben.

Definition. (Addition und Subtraktion von Matrizen)
Zwei $m \times n$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

werden eintragsweise addiert bzw. subtrahiert:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}, \; A-B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Für die Matrizenaddition gelten ein paar einfache Rechenregeln:

Satz. (Regeln der Matrizenaddition)
1. Die Matrizenaddition ist *kommutativ*, d.h. die Reihenfolge der Faktoren darf verändert werden: $A+B=B+A$.
2. Die Matrizenaddition ist *assoziativ*, d.h. die Summen von mehr als zwei Matrizen können in beliebiger Reihenfolge berechnet werden: $(A+B)+C = A+(B+C)$
3. Addiert man die **Nullmatrix** O, das ist diejenige Matrix, deren Einträge alle Null sind, ändert sich die Matrix nicht: $A+O=A$. Man sagt: Die Nullmatrix ist das neutrale Element der Matrizenaddition.

Im Wesentlichen bedeutet dies, dass für die Matrizenaddition dieselben Regeln wie für die Addition reeller Zahlen gelten.

2.3.2 Rechenregeln der Matrizenmultiplikation

Auch für die Matrizenmultiplikation gelten ein paar Rechenregeln, jedoch können nicht alle Regeln übertragen werden. Die Matrizenmultiplikation ist nämlich nicht kommutativ, das heißt, man darf die Reihenfolge der Faktoren bei einem Produkt in der Regel nicht vertauschen. Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ aber } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz. (Regeln der Matrizenmultiplikation)
1. Die Matrizenmultiplikation ist *assoziativ*, d.h. die Produkte von mehr als zwei Matrizen können in beliebiger Reihenfolge berechnet werden: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. Bei Matrizenmultiplikation und Matrizenaddition gelten zwei *Distributivgesetze*: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ sowie $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

2.3.3 Skalarmultiplikation

Matrizen können auch mit reellen Zahlen multipliziert werden. Man nennt diese Operation auch Skalarmultiplikation.

Definition. (Skalarmultiplikation) Ein $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wird mit einer reellen Zahl α multipliziert, indem jeder Eintrag mit α malgenommen wird:

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Auch für die Skalarmultiplikation halten wir die wichtigsten Rechenregeln fest.

Satz. (Regeln der Skalarmultiplikation)
Im Folgenden stehen Großbuchstaben für Matrizen und kleine griechische Buchstaben für reelle Zahlen.
1. Die Skalarmultiplikation ist *assoziativ*, d.h. die Produkte von zwei Zahlen mit einer Matrix oder einer Zahl mit zwei Matrizen können in beliebiger Reihenfolge berechnet werden: $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$ und $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$. Außerdem gilt $(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$.
2. Bei Skalarmultiplikation gelten zwei *Distributivgesetze*: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ sowie $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.
3. Ist $\alpha \cdot A = O$ (**Nullmatrix**), dann ist $\alpha = 0$ oder $A = O$.

2.4 Übungen

2.4.1 Berechnen Sie die folgenden Produkte.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$

2.4.2 Prüfen Sie, ob das Produkt definiert ist, und berechnen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

2.4.3 Berechnen Sie $A \cdot B$. Überprüfen Sie dann, ob auch $B \cdot A$ definiert ist, berechnen Sie gegebenenfalls auch dieses Produkt und vergleichen Sie die beiden Werte.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 8 & 6 \\ 12 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & 6 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

2.4.4 Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$:

a) A^2 b) A^3 c) $2 \cdot A^3 - 4 \cdot A + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $A^2 + 2 \cdot A - 11 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.4.5 Bestätigen Sie für die folgenden drei Matrizen

$$A=\begin{pmatrix}2&4&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3\\1&3\\2&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}40&90&80&50\\50&0&50&70\end{pmatrix}$$

das Assoziativgesetz $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

2.4.6 Berechnen Sie für

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-5&1&3\\-3&1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&2&-4\\0&2&8\\1&-7&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&-7&3&0\\0&2&-1&4\end{pmatrix}$$

die folgenden Produkte und vergleichen Sie die Ergebnisse. Zur Erinnerung: Wären A,B,C reelle Zahlen, wären alle Ergebnisse gleich!

a) $(A\cdot B)\cdot C$ b) $A\cdot(B\cdot C)$ c) $(B\cdot A)\cdot C$ d) $A\cdot(C\cdot B)$

2.4.7 Die Matrizenmultiplikation ist *nicht* nullteilerfrei: Dies bedeutet, es gibt Matrizen A und B, die beide nicht die Nullmatrix sind, für die aber $A\cdot B=O$ gilt. Anders als bei reellen Zahlen kann also im Bereich der Matrizen aus der Gleichung $A\cdot B=O$ nicht geschlossen werden, dass mindestens ein Faktor Null ist.

a) Belegen Sie dies, indem Sie zwei von der Nullmatrix verschiedene 2x2-Matrizen angeben, deren Produkt O ist.

b) Untersuchen Sie, ob es eine von der Nullmatrix verschiedene 2x2-Matrix A gibt, deren Quadrat O ist: $A^2=O$.

2.4.8 Berechnen Sie für die Situation in Übung 1.4.5 mit der Übergangsmatrix

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2&0{,}3&0{,}2\\0{,}4&0{,}6&0{,}5\\0{,}4&0{,}1&0{,}3\end{pmatrix}$$

die 2-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie hiermit aus der Anfangsverteilung Station A: 70 % der Fahrräder, Station B: 20 % der Fahrräder und Station C: 10 % der Fahrräder die Anzahl der Fahrräder an den drei Stationen am Abend des zweiten Tages.

2.4.9 Berechnen Sie für die Gruppe der 7.000 Nichtraucher, 2.000 Gelegenheitsraucher und 1.000 täglichen Rauchern aus Übung 1.4.6 mit der Übergangsmatrix

$$A=\begin{pmatrix}0{,}8&0{,}35&0{,}05\\0{,}12&0{,}33&0{,}1\\0{,}08&0{,}32&0{,}85\end{pmatrix}$$

die Anzahl derjenigen, die nach drei Jahren Nichtraucher, Gelegenheitsraucher und (tägliche) Raucher sein werden. Geben Sie überdies die Wahrscheinlichkeiten an, dass

- ein zu Beginn Nichtraucher nach drei Jahren ein täglicher Raucher;
- ein zu Beginn täglicher Raucher nach drei Jahren ein Gelegenheitsraucher;
- ein zu Beginn täglicher Raucher nach drei Jahren ein Nichtraucher

ist.

2.4.10 Der Kindergarten Ömmes und Oimel will in vier Tagen einen Ausflug in den Wald machen. Der Ausflug kann nur bei trockenem Wetter stattfinden. Verwenden Sie das sehr einfache Modell des Wetters in Bonn aus Übung 1.4.7 mit der Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}25 \\ 0{,}34 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

zwischen Regentagen und Trockentagen, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass der Ausflug stattfinden kann, wenn heute

a) trockenes Wetter
b) regnerisches Wetter

ist.

2.4.11 Ermitteln Sie für die Population von Insekten aus Übung 1.4.8 mit der Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix},$$

wie das Verhältnis der Anzahlen der Tiere mit Merkmal A bzw. Merkmal B in der F3-Generation ist, wenn das Verhältnis in der P-Generation bei 6:4 lag.

3 Rückschließen auf Anfangsverteilungen

3.1 Blick in die Vergangenheit

Unser bisheriges Augenmerk bei der Untersuchung mehrstufiger Prozesse lag auf der Berechnung zukünftiger Verteilungen bei vorgegebener Startverteilung. Es ist aber auch sinnvoll, die umgekehrte Frage zu stellen: Welche Startverteilung hat denn zu einer jetzt bestehenden Situation geführt?

In der Rent-a-Bike-Anwendung mag es zum Beispiel so sein, dass die Verteilung der Fahrräder auf die Stationen am Ende des Tages bekannt ist, nicht aber die morgendliche Startverteilung, da die entsprechenden Computerdaten durch einen Absturz des Systems verloren gegangen sind. Für den nächsten Morgen soll aber – durch nächtlichen Transport von Fahrrädern zwischen den Stationen – diese Startverteilung wiederhergestellt werden.

Die bekannte Verteilung am Abend sei $\vec{y} = \begin{pmatrix} 65 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$. Zu bestimmen ist also ein Vektor $\vec{x}$, sodass

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 65 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$$

ist. Der Vektor $\vec{x}$ hat drei Komponenten, die wir mit x_1, x_2 und x_3 bezeichnen wollen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Indem wir dies einsetzen und die dann die Übergangsmatrix mit diesem Vektor multiplizieren, erhalten wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 65 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \\ 0{,}12x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}1x_3 \\ 0{,}08x_1 + 0{,}45x_2 + 0{,}4x_3 \end{pmatrix}.$$

Damit die beiden Vektoren ganz links und ganz rechts übereinstimmen, müssen jeweils die Komponenten übereinstimmen, sodass wir drei Gleichungen erhalten:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 0{,}8x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & 0{,}5x_3 & = & 65 \\ \text{II} & 0{,}12x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & = & 10 \\ \text{III} & 0{,}08x_1 & + & 0{,}45x_2 & + & 0{,}4x_3 & = & 25 \end{array}$$

Es müssen Zahlen x_1, x_2 und x_3 gefunden werden, die simultan jede der Gleichungen erfüllen.

Definition. (Lineares Gleichungssystem) Ein System von Gleichungen, in denen auf einer Seite nur Terme der Art $\pm ax_i$ vorkommen, wobei a eine reelle Zahl ist, und auf der anderen Seite jeweils nur eine Zahl steht, heißt **Lineares Gleichungssystem**, kurz: **LGS**.

Es kann stets vektoriell in der Form $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ geschrieben werden. Die Matrix A wird auch **Koeffizientenmatrix** genannt, der Vektor $\vec{y}$ heißt auch **rechte Seite** des LGS.

3.2 Lösen von Linearen Gleichungssystemen mithilfe des Gauß-Algorithmus‘

Für das Lösen eines LGS stehen die folgenden Umformungen zur Verfügung, die die Lösungen nicht verändern und deshalb Äquivalenzumformungen heißen:

- Die Reihenfolge der Gleichungen darf verändert werden.
- Jede Gleichung darf mit Zahlen, die nicht Null sind, multipliziert werden, und durch Zahlen ungleich Null geteilt werden.
- Zu jeder Gleichung darf das Vielfache einer der anderen Gleichungen addiert werden; von jeder Gleichung darf das Vielfache einer der anderen Gleichungen abgezogen werden.

Ziel des Gauß-Algorithmus, der auch Gaußsches Eliminationsverfahren genannt wird, ist es, das LGS mithilfe der oben angegebenen Äquivalenzumformungen auf Zeilenstufenform zu bringen:

Definition. (LGS in Zeilenstufenform) Ein LGS ist in **Zeilenstufenform**, wenn in jeder Zeile der niedrigste Index aller Unbekannten in dieser Zeile kleiner ist als der niedrigste Index aller Unbekannten in der folgenden Zeile.

Das folgende LGS ist in Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & 5x_1 & - & 0,3x_2 & + & 8x_3 & = & 7 \\ \mathrm{II} & & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ \mathrm{III} & & & & & 0,5x_3 & = & -4,5 \end{array}$$

Die Werte der Unbekannten lassen sich rückwärts von der letzten bis zur ersten Gleichung bestimmen:

- Aus Gleichung III ergibt sich $x_3 = -9$.
- Aus Gleichung III erhält man dann $3x_2 = 3 - 2x_3 = 5 - 2 \cdot (-9) = 23$, also $x_3 = 23/3$.
- Gleichung I ergibt dann $-6x_1 = 7 + 0,3x_2 - 8x_3 = 7 + 0,3 \cdot 23/3 - 8 \cdot (-9) = 81,3$, also $x_1 = -13,55$
.

Die Lösung des LGS ist also $\vec{x} = \begin{pmatrix} -13,55 \\ 23/3 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Das LGS

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & & & 4x_2 & + & 0,5x_3 & = & 6 \\ \mathrm{II} & & - & x_2 & + & 10x_3 & = & -13 \\ \mathrm{III} & x_1 & & & + & 8x_3 & = & 2 \end{array}$$

ist dagegen nicht in Zeilenstufenform. (Warum? Finden Sie alle Verstöße gegen die Definition von „Zeilenstufenform“.) Der Zeilenstufenform kann man näher kommen, wenn man die erst und die dritte Zeile vertauscht. Es entsteht das LGS

$$\begin{array}{lrrrcr} \text{I} & x_1 & & +\ 8x_3 & = & 2 \\ \text{II} & & -\ x_2 & +\ 10x_3 & = & -13 \\ \text{III} & & 4x_2 & +\ 0,5x_3 & = & 6 \end{array}$$

Um das System endgültig auf Zeilenstufenform zu bringen, müssen die $4x_2$ aus der letzten Zeile verschwinden. Dies kann man erreichen, indem man das Vierfache der zweiten Zeile zur (neuen) dritten Zeile addiert:

$$\begin{array}{c|rrcr} & 4x_2 & +\ 0,5x_3 & = & 6 \\ + & -\ 4x_2 & +\ 40x_3 & = & -52 \\ \hline & & 40,5x_3 & = & -46 \end{array}$$

Wir addieren diese neue Gleichung an der Stelle von Gleichung III:

$$\text{III} \to \text{III} + 4 \cdot \text{II}$$

$$\begin{array}{lrrrcr} \text{I} & x_1 & & +\ 8x_3 & = & 2 \\ \text{II} & & -\ x_2 & +\ 10x_3 & = & -13 \\ \text{III} & & & 40,5x_3 & = & -46 \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen ergeben sich jetzt die Lösungen:

- Aus Gleichung III ergibt sich $x_3 = -46/40,5 = -92/81$.
- Aus Gleichung III erhält man dann $-x_2 = -13 - 10x_3 = -13 + 10 \cdot 92/81 = -133/81$, also $x_3 = 133/81$.
- Gleichung I ergibt $x_1 = 2 - 8x_3 = 2 + 8 \cdot 92/81 = 898/81$.

Komplizierte LGS werden mit dem Gauß-Algorithmus auf ganz analoge Weise in Zeilenstufenform gebracht. Nur sind hierbei in der Regel mehr Rechenschritte erforderlich. Wie dies funktioniert, zeigen wir anhand des LGS aus der Rent-a-Bike-Anwendung:

$$\begin{array}{lrrrcr} \text{I} & 0,8x_1 & +\ 0,5x_2 & +\ 0,5x_3 & = & 65 \\ \text{II} & 0,12x_1 & +\ 0,05x_2 & +\ 0,1x_3 & = & 10 \\ \text{III} & 0,08x_1 & +\ 0,45x_2 & +\ 0,4x_3 & = & 25 \end{array}$$

Schritt 1. Wir dividieren Gleichung I durch $0,8$, um den Koeffizienten von x_1 loszuwerden. Dies ist nicht unbedingt erforderlich, hilft aber in den folgenden Schritten bei der Elimination der Unbekannten x_1 aus den Gleichungen II und III. Die durchgeführte Umformung vermerken wir oberhalb des Gleichungssystems.

$$\text{I} \to \text{I} : 0,8$$

$$\begin{array}{lrrrcr} \text{I} & x_1 & +\ 0,625x_2 & +\ 0,625x_3 & = & 81,25 \\ \text{II} & 0,12x_1 & +\ 0,05x_2 & +\ 0,1x_3 & = & 10 \\ \text{III} & 0,08x_1 & +\ 0,45x_2 & +\ 0,4x_3 & = & 25 \end{array}$$

Schritt 2. Um die Unbekannte x_1 aus Gleichung II zu eliminieren, ziehen wir von Gleichung II das $0,12$-fache von (der in Schritt 1 neu entstandenen) Gleichung I ab:

$$\begin{array}{r|rcrcrcr} & 0{,}12x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & = & 10 \\ - & 0{,}12x_1 & + & 0{,}075x_2 & + & 0{,}075x_3 & = & 9{,}75 \\ \hline & 0 & - & 0{,}025x_2 & + & 0{,}025x_3 & = & 0{,}25 \end{array}$$

Wir notieren diese neue Gleichung an Stelle der Gleichung II:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \multicolumn{8}{l}{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 0{,}12 \cdot \mathrm{I}} \\ \mathrm{I} & x_1 & + & 0{,}625x_2 & + & 0{,}625x_3 & = & 81{,}25 \\ \mathrm{II} & & - & 0{,}025x_2 & + & 0{,}025x_3 & = & 0{,}25 \\ \mathrm{III} & 0{,}08x_1 & + & 0{,}45x_2 & + & 0{,}4x_3 & = & 25 \end{array}$$

Schritt 3. Um die Unbekannte x_1 aus Gleichung III zu eliminieren, ziehen wir von Gleichung III das $0{,}08$-fache von Gleichung I ab:

$$\begin{array}{r|rcrcrcr} & 0{,}08x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}4x_3 & = & 25 \\ - & 0{,}08x_1 & + & 0{,}45x_2 & + & 0{,}05x_3 & = & 6{,}5 \\ \hline & 0 & & 0{,}4x_2 & + & 0{,}35x_3 & = & 18{,}5 \end{array}$$

Wir notieren diese neue Gleichung an Stelle der Gleichung III:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \multicolumn{8}{l}{\mathrm{III} \to 0{,}08 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{III}} \\ \mathrm{I} & x_1 & + & 0{,}625x_2 & + & 0{,}625x_3 & = & 81{,}25 \\ \mathrm{II} & & - & 0{,}025x_2 & + & 0{,}025x_3 & = & 0{,}25 \\ \mathrm{III} & & & 0{,}4x_2 & + & 0{,}35x_3 & = & 18{,}5 \end{array}$$

Schritt 4. Wir dividieren Gleichung II durch $-0{,}025$, um den Koeffizienten von x_2 loszuwerden:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \multicolumn{8}{l}{\mathrm{II} \to \mathrm{II} : \left(-0{,}025\right)} \\ \mathrm{I} & x_1 & + & 0{,}625x_2 & + & 0{,}625x_3 & = & 81{,}25 \\ \mathrm{II} & & & x_2 & - & x_3 & = & -10 \\ \mathrm{III} & & - & 0{,}4x_2 & - & 0{,}35x_3 & = & -18{,}5 \end{array}$$

Schritt 5. Um die Unbekannte x_2 aus Gleichung III zu eliminieren, ziehen wir von Gleichung III das $-0{,}4$-fache von (der in Schritt 4 neu entstandenen) Gleichung II ab:

$$\begin{array}{r|crcrcr} & - & 0{,}4x_2 & - & 0{,}35x_3 & = & -18{,}5 \\ - & - & 0{,}4x_2 & + & 0{,}4x_3 & = & 4 \\ \hline & & & - & 0{,}75x_3 & = & -22{,}5 \end{array}$$

Wir notieren diese neue Gleichung an Stelle der Gleichung III:

$$\text{III} \to \text{III} - (-0{,}4) \cdot \text{II}$$

$$\begin{array}{lcccccc} \text{I} & x_1 & + & 0{,}625x_2 & + & 0{,}625x_3 & = & 81{,}25 \\ \text{II} & & & x_2 & - & x_3 & = & -10 \\ \text{III} & & & & - & 0{,}75x_3 & = & -22{,}5 \end{array}$$

Damit ist das Eliminationsverfahren abgeschlossen. Das Gleichungssystem ist nun in Zeilenstufenform, und die Werte für x_3, x_2 und x_1 können sukzessive berechnet werden:

- Aus Gleichung III $-0{,}75x_3 = -22{,}5$ ergibt sich $x_3 = 30$.
- Dies wird in Gleichung II $x_2 - x_3 = 10$ für x_3 eingesetzt: $x_2 - 30 = -10$. Hieraus folgt $x_2 = 20$.
- Die für x_3 und x_2 bereits gefundenen Werte werden nun abschließend in Gleichung I $x_1 + 0{,}625x_2 + 0{,}625x_3 = 81{,}25$ eingesetzt: $x_1 + 0{,}625 \cdot 40 + 0{,}625 \cdot 20 = 81{,}25$. Hieraus ergibt sich $x_1 = 50$

Der gesuchte Startvektor ist also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$.

3.3 Lösungskriterien für Lineare Gleichungssysteme

Wir haben bereits im Bereich der Analysis gesehen, dass manche Gleichungen – zum Beispiel quadratische Gleichungen – nicht immer lösbar sind. Andererseits haben manche Gleichungen nicht nur eine sondern sogar mehrere Lösungen. Wie sieht es im Bereich der Linearen Gleichungssysteme aus? Das oben behandelte Beispiel hatte genau eine Lösung, was in vielen Anwendungen natürlich als Idealfall angesehen werden wird.

Satz. (Anzahl der Lösungen eines LGS)
Ein LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ hat entweder keine, oder genau eine oder unendlich viele paarweise verschiedene Lösungen.

Dies bedeutet, ein LGS kann nicht genau zwei oder genau drei oder genau vier … verschiedene Lösungen haben.

Um den Satz zu *beweisen*, nehmen wir an, ein LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ hat zwei verschiedenen Lösungen $\vec{u}$ und $\vec{v}$: Es gilt also $\vec{u} \neq \vec{v}$ und $A \cdot \vec{u} = \vec{y}$ sowie $A \cdot \vec{u} = \vec{y}$. Wir müssen nachweisen, dass das LGS sogar unendlich viele paarweise verschiedene Lösungen haben.
Für jede natürliche Zahl n setzen wir hierfür $\vec{x}_n = \vec{u} + n \cdot (\vec{v} - \vec{u})$. Dann sind die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots$ ebenfalls Lösungen des LGS, denn

$$\begin{aligned} A\cdot\vec{x}_n = &= A\cdot\left(\vec{u}+n\cdot\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\right)\\ &= A\cdot\vec{u}+A\cdot\left(n\cdot\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\right)\\ &= A\cdot\vec{u}+n\cdot\left(A\cdot\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\right)\\ &= A\cdot\vec{u}+n\cdot\left(A\cdot\vec{v}-A\cdot\vec{u}\right)\\ &= \vec{y}+n\cdot\left(\vec{y}-\vec{y}\right)\\ &= \vec{y}. \end{aligned}$$

Wir müssen noch nachweisen, dass für $m \neq n$ auch $\vec{x}_m \neq \vec{x}_n$ ist. Hierzu berechnen wir $\vec{x}_m - \vec{x}_n$ und zeigen, dass dies nicht die Nullmatrix ist:

$$\begin{aligned} \vec{x}_m-\vec{x}_n = &= \vec{u}+m\cdot\left(\vec{v}-\vec{u}\right)-\left(\vec{u}+n\cdot\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\right)\\ &= \vec{u}+m\cdot\left(\vec{v}-\vec{u}\right)-\vec{u}-n\cdot\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\\ &= \left(m-n\right)\cdot\left(\vec{v}-\vec{u}\right) \end{aligned}$$

Wäre dies die Nullmatrix, müsste $m = n$ oder $\vec{v} = \vec{u}$ sein. Beides haben wir ausgeschlossen. ■

Wie genau man entscheiden kann, ob ein LGS lösbar ist und ob die Lösung eindeutig ist, verrät der folgende Satz.

Satz. (Lösungskriterium für LGS)
Die Zeilenstufenform jedes LGS hat schematisch das folgende Aussehen:

$$\begin{array}{cccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \oplus \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \oplus \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \oplus \\ & & & & & 0 & \otimes \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & \otimes \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} r \text{ Zeilen} \\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} s \text{ Zeilen} \end{array}$$

Hierbei steht der Strich an der Stelle des Gleichheitszeichens.
Die mit $\bullet$ gekennzeichneten Bereiche in den ersten r Zeilen enthalten Terme, in denen *mindestens eine der Unbekannten* vorkommt. Diese Zahl r heißt auch der **Rang** des LGS bzw. der Koeffizientenmatrix A: $r = \mathrm{rg}(A)$

Nach diesen ersten r Zeilen des Schemas können sich weitere s Nullzeilen anschließen, bei denen links des Gleichheitszeichens nur die Zahl 0 steht.
Die mit $\oplus$ bzw. $\otimes$ gekennzeichneten Bereiche können beliebige Zahlen enthalten.

Für die Anzahl der Lösungen eines LGS mit den Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt:
Falls $s > 0$ ist und es in dem mit $\otimes$ gekennzeichneten Bereich eine Zahl ungleich Null gibt, dann hat das System keine Lösung.
In allen anderen Fällen – d.h. sollten Nullzeilen auftreten steht auch auf der rechten Seite jeder Nullzeile die Zahl 0 – hat das System

- genau eine Lösung, falls $r = n$ ist;
- unendlich viele Lösungen, falls $r < n$ ist.

Anstatt den Satz zu beweisen, behandeln wir exemplarisch die möglichen Fälle. Dabei beschränken wir uns auf **quadratische LGS**, bei denen genauso viele Gleichungen wie Unbekannte vorhanden sind.

Beispiel 1. Das oben bereits durchgerechnete LGS

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 0{,}8x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & 0{,}5x_3 & = & 65 \\ \text{II} & 0{,}12x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & = & 10 \\ \text{III} & 0{,}08x_1 & + & 0{,}45x_2 & + & 0{,}4x_3 & = & 25 \end{array}$$

mit der Zeilenstufenform

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x_1 & + & 0{,}625x_2 & + & 0{,}625x_3 & = & 81{,}25 \\ \text{II} & & & x_2 & - & x_3 & = & -10 \\ \text{III} & & & & & 0{,}75x_3 & = & 22{,}5 \end{array}$$

ist ein Beispiel für den Fall $s=0$. Es hat wie gesehen genau eine Lösung, die durch „Rückwärtslösen und Einsetzen“ beginnend mit der letzten Gleichung gelöst werden kann

Beispiel 2. Wir transformieren das System

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\ \text{II} & -4x_1 & + & 8x_2 & - & 5x_3 & = & -23 \\ \text{III} & 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 15 \end{array}$$

in Zeilenstufenform. Dabei fassen wir jeweils mehrere Schritte zusammen und lassen Nebenrechnungen weg.

Schritt 1 $\text{I} \rightarrow \text{I}:2$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x_1 & - & 2x_2 & + & 1{,}5x_3 & = & 5{,}5 \\ \text{II} & -4x_1 & + & 8x_2 & - & 5x_3 & = & -23 \\ \text{III} & 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 15 \end{array}$$

Schritt 2 $\text{II} \rightarrow \text{II} - (-4)\cdot \text{I}$ und $\text{III} \rightarrow \text{III} - 2\cdot \text{I}$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x_1 & - & 2x_2 & + & 1{,}5x_3 & = & 5{,}5 \\ \text{II} & & & & & x_3 & = & -1 \\ \text{III} & & & & - & 4x_3 & = & 4 \end{array}$$

Beachten Sie, dass nach unserer Definition das System noch nicht in Zeilenstufenform ist: Die letzte Zeile muss eine Unbekannte weniger enthalten als die Zeile zuvor. Deshalb ist noch eine weitere Umformung notwendig.

Schritt 3 $\text{III} \rightarrow \text{III} - 4\cdot \text{II}$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x_1 & - & 2x_2 & + & 1{,}5x_3 & = & 5{,}5 \\ \text{II} & & & & & x_3 & = & -1 \\ \text{III} & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

In diesem Fall ist also $s=1$. Aus der vorletzten Zeile liest man ab: $x_3=-1$. Setzt man dies in die erste Zeile ein und formt diese nach x_1 um, ergibt sich die Gleichung $x_1=7+2x_2$. Dies bedeutet:

Für jede Wahl von x_2 ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 + x_2 \\ x_2 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des LGS. Es gibt also in der Tat unendlich viele Lösungen. Wählen wir zum Beispiel $x_2 = 3$, so ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine „partikuläre“ Lösung des LGS.

Definition (partikuläre Lösung). Jede Lösung des LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ heißt auch eine **partikuläre Lösung** des LGS.

Beispiel 3. Wir ändern nun das LGS aus Beispiel 2 auf der rechten Seite der letzten Zeile leicht ab:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \mathrm{I} & 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\ \mathrm{II} & -4x_1 & + & 8x_2 & - & 5x_3 & = & -23 \\ \mathrm{III} & 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 10 \end{array}$$

Mit genau denselben Rechnungen wie eben kommen wir nun zu der Zeilenstufenform

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \mathrm{I} & x_1 & - & 2x_2 & + & 1{,}5x_3 & = & 5{,}5 \\ \mathrm{II} & & & & & x_3 & = & -1 \\ \mathrm{III} & & & & & 0 & = & -5 \end{array}$$

Wieder ist $s = 1$. Diesmal jedoch ist die letzte Zeile eine Nullzeile mit rechter Seite ungleich Null. Da die Gleichung $0 = -5$ durch keine Wahl der Unbekannten erfüllt werden kann, hat das LGS keine Lösung

3.4 Ein tieferer Einblick in die Lösungstheorie

Um die Lösungen eines LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ genauer zu beschreiben, unterscheiden wir die Fälle $\vec{y} = \vec{o}$ und $\vec{y} \neq \vec{o}$. Hierbei ist A eine $n \times n$-Matrix[1] und $\vec{o}$ ist der Nullvektor, dessen Komponenten alle die Zahl Null sind.

Definition.
Jedes LGS von der Form $A \cdot \vec{x} = \vec{o}$ heißt **homogenes** LGS. Jedes LGS von der Form $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ mit $\vec{y} \neq \vec{o}$ heißt **inhomogenes** LGS.

Wir untersuchen zunächst die Lösungstheorie des homogenen LGS.

[1] Die Beschränkung auf quadratische LGS ist nicht notwendig, vereinfacht jedoch einige Betrachtungen.

3.4.1 Homogene LGS

Ein homogenes LGS hat immer mindestens eine Lösung, nämlich $\vec{x}=\vec{o}$. Und sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Lösungen von $A\cdot\vec{x}=\vec{o}$ und sind α und β irgendwelche reelle Zahlen, so folgt aus den Regeln der Matrizen- und der Skalarmultiplikation

$$A\cdot\left(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\right)=\alpha\cdot A\cdot\vec{u}+\beta\cdot A\cdot\vec{v}=\alpha\cdot\vec{o}+\beta\cdot\vec{o}=\vec{o}.$$

Das heißt, auch $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ ist eine Lösung des homogenen LGS. Wir führen ein paar gebräuchliche Sprechweisen ein, um dies konziser festzuhalten.

Definition.

1. Die Menge aller Lösungen des homogenen LGS $A\cdot\vec{x}=\vec{o}$ wird mit $\ker(A)$ bezeichnet und heißt **Kern** von A: $\ker(A)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\cdot\vec{x}=\vec{o}\right\}$.
2. Ein Vektor $\vec{x}$ ist eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_N$, wenn es reelle Zahlen $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$ gibt[2], sodass $\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_N\vec{x}_N$ gilt.
3. Eine Teilmenge $L\subseteq\mathbb{R}^n$ ist ein **linearer Raum**, wenn $\vec{o}\in L$ ist und wenn für je zwei Vektoren aus L auch jede Linearkombination dieser beiden Vektoren wieder zu L gehört.

Mit den soeben eingeführten Begriffen, können die eingangs gemachen Beobachtungen wie folgt formuliert werden:

Satz.
$\ker(A)$ ist ein linearer Raum.

Um die als nächstes benötigten Begriffe zu motivieren, werfen wir zuerst einen Blick auf den linearen Raum $L=\mathbb{R}^3$.

Zu diesem gehören die drei sogenannten Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Man sieht ganz leicht, dass keiner dieser Vektoren eine Linearkombination der anderen beiden ist: Aus dem Ansatz

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

folgt zum Beispiel, wenn man die obersten Komponenten vergleicht, $1=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$, ein Widerspruch.

---

[2] Einige oder sogar alle dieser Zahlen dürfen auch Null sein.

Definition (linear unabhängig).
Die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N$ heißen **linear unabhängig**, wenn keiner der Vektoren eine Linearkombination der anderen ist. Sie heißen **linear abhängig**, falls dies nicht der Fall ist, wenn also einer der Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N$ eine Linearkombination der anderen ist.

Die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ haben wir soeben als linear unabhängig erkannt. Nehmen wir nun irgendeinen anderen Vektor $\vec{x}$ des $\mathbb{R}^3$ hinzu, zum Beispiel

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix},$$

so kann $\vec{x}$ als Linearkombination der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definition (Basis).
Die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N$ aus dem linearen Raum L heißen **Basis** von L, wenn sie linear unabhängig sind und jeder andere Vektor aus L eine Linearkombination von $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N$ ist.

Was wir über Basen wissen müssen, fasst der folgende Satz zusammen.

Satz. (Existenz und Eigenschaften einer Basis)
1. Jeder lineare Raum hat eine Basis.
2. Die Darstellung eines jeden Vektors $\vec{x}$ durch die Vektoren der Basis $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N$ ist eindeutig. Das heißt, gilt $\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_N \vec{x}_N$ und $\vec{x} = \beta_1 \vec{x}_1 + \beta_2 \vec{x}_2 + \ldots + \beta_N \vec{x}_N$, so ist $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_N = \beta_N$.
3. Je zwei Basen eines linearen Raumes haben die gleiche Anzahl an Vektoren.

Die Anzahl der Vektoren einer (und damit jeder) Basis eines linearen Raumes ist seine wichtigste Kenngröße.

Definition (Dimension).
Die Dimension eines linearen Raumes L ist die Anzahl der Vektoren einer (und damit jeder) Basis von L. Sie wird mit $\dim(L)$ bezeichnet.

Gilt $L \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist $\dim(L) \leq n$. Insbesondere ist $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Als linearer Raum hat auch $\ker(A)$ eine Basis. Die sogenannte Dimensionsformel gibt Auskunft über seine Dimension.

Satz. (Dimensionsformel)
Für jede $n \times n$-Matrix A gilt: $\dim(\ker(A)) + \operatorname{rg}(A) = n$.

Wir hatten den Rang eines LGS als Anzahl der Zeilen definiert, nach der Transformation auf Zeilenstufen mindestens eine der Unbekannten enthält, und dies schematisch so dargestellt:

$$\begin{array}{cccccc|c} \bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\oplus\\ &\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\oplus\\ &&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\oplus \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\}\operatorname{rg}(A)\text{ Zeilen}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} &&&&&0&\otimes\\ &&&&&\vdots&\vdots\\ &&&&&0&\otimes \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\}s\text{ Zeilen}$$

Aus der Dimensionsformel ergibt sich, dass $\dim(\ker(A)) = s$ ist. Wir fassen dies zusammen:

Satz.
Entstehen auf der linken Seite des quadratischen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ nach Transformation auf Zeilenstufenform genau s Zeilen, in denen keine der Unbekannten mehr vorkommt, so gibt es genau s linear unabhängige Lösungen des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
Jede beliebige Lösung des homogenen LGS ist eine Linearkombination dieser Vektoren.

3.4.2 Inhomogene LGS

Wir erinnern an den Begriff der partikulären Lösung: Jede Lösung des LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ heißt auch eine partikuläre Lösung des LGS.

Angenommen, wir haben eine partikuläre Lösung $\vec{x}^{(p)}$ gefunden.

Ist dann $\vec{u} \in \ker(A)$, so ist auch $\vec{x} = \vec{x}^{(p)} + \vec{u}$ eine Lösung des inhomogenen LGS, denn

$$A \cdot \vec{x} = A \cdot \left(\vec{x}^{(p)} + \vec{u}\right) = A \cdot \vec{x}^{(p)} + A \cdot \vec{u} = \vec{y} + \vec{o} = \vec{y}.$$

Das bedeutet: Addiert man zu einer Lösung des inhomogenen LGS eine Lösung des homogenen LGS, so erhält man erneut eine Lösung des inhomogenen LGS.

Umgekehrt, wenn $\vec{x}$ eine beliebige Lösung des inhomogenen LGS ist, so ist $\vec{u} = \vec{x} - \vec{x}^{(p)}$ eine Lösung des inhomogenen LGS, denn

$$A \cdot \vec{u} = A \cdot \left(\vec{x} - \vec{x}^{(p)}\right) = A \cdot \vec{x} - A \cdot \vec{x}^{(p)} = \vec{y} - \vec{y} = \vec{o}.$$

Außerdem gilt $\vec{x}^{(p)} + \vec{u} = \vec{x}^{(p)} + \vec{x} - \vec{x}^{(p)} = \vec{x}$. Dies bedeutet: Jede Lösung des inhomogenen LGS ist von der Form $\vec{x}^{(p)} + \vec{u}$, wobei $\vec{u} \in \ker(A)$ ist.

Wir fassen dies zusammen:

Satz.
Es sei $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_s$ eine Basis von $\ker(A)$ und $\vec{x}^{(p)}$ sei eine partikuläre Lösung des inhomogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$. Dann sind die Vektoren

$$\vec{x}^{(p)} + \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_s \vec{x}_s,$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ beliebige reelle Zahlen sind, die Gesamtheit aller Lösungen des inhomogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$.

3.5 Die inverse Matrix

Wir betrachten ein LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$. Handelte es sich hierbei um eine Gleichung im Bereich der reellen Zahlen, könnte man einfach durch A teilen oder – gleichbedeutend – mit A^{-1} multiplizieren und die Gleichung unmittelbar nach $\vec{x}$ auflösen:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}.$$

Leider ist die Sache komplizierter, wenn wir nicht mit Zahlen sondern mit Matrizen rechnen. Dies hängt übrigens damit zusammen, dass die Matrizenmultiplikation nicht nullteilerfrei ist, also aus $A \cdot B = O$ nicht geschlossen werden, dass $A = O$ oder $B = O$ ist.

Da das „Teilen durch A" zu einer eindeutigen Lösung des LGS führen würde, kann dieses Verfahren überhaupt nur dann möglich sein, wenn das LGS eindeutig lösbar ist. Wie wir wissen, ist dies genau dann der Fall, wenn die Koeffizientenmatrix quadratisch und der Rang der Koeffizientenmatrix größtmöglich (also n bei einer $n \times n$-Koeffizientenmatrix) ist. Das folgende Resultat lehrt uns, dass in dieser Situation auch wirklich die inverse Matrix existiert:

Satz. (Eigenschaften und Existenz der inversen Matrix)
Es sei A eine $n \times n$-Matrix.
Genau dann, wenn $\mathrm{rg}(A) = n$ ist, existiert eine zu A **inverse Matrix** A^{-1}. Dann gilt $A^{-1} \cdot A = E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix ist, die außer Einsen auf der Diagonalen nur Nullen als Einträge hat:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ ist $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$.

Abschließend soll erläutert werden, wie A^{-1} bestimmt werden kann. Wir tun dies am Beispiel der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

aus der Rent-a-Bike-Anwendung. (Hier haben wir oben bereits gesehen, dass der Rang maximal, also 3, ist.

Wir erweitern zunächst die Matrix nach rechts, indem wir hier die Einheitsmatrix E_3 ergänzen. Wir lassen die Klammern weg und deuten durch eine Stich die Grenze zwischen A und E_3 an:

$$\begin{array}{rrr|rrr} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ziel ist es, diese Matrix mit den für LGS zulässigen Äquivalenzumformungen so umzuformen, dass links vom Strich die Einheitsmatrix entsteht. Der Teil rechts vom Strich ist dann die inverse Matrix. Zunächst bringen wir die Matrix auf Zeilenstufenform:

Schritt 1. Wir dividieren die erste Zeile durch $0{,}8$:

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0{,}625 & 0{,}625 & 1{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Schritt 2. Indem wir das $0{,}12$-fache der ersten Zeile von der zweiten und das $0{,}08$-fache der ersten Zeile von der dritten Zeile abziehen, erreichen wir Nullen in der ersten Spalte:

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0{,}625 & 0{,}625 & 1{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}025 & 0{,}025 & -0{,}15 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}35 & -0{,}1 & 0 & 1 \end{array}$$

Schritt 3. Wir dividieren die zweite Zeile durch $-0{,}025$:

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0{,}625 & 0{,}625 & 1{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & -40 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}35 & -0{,}1 & 0 & 1 \end{array}$$

Schritt 4. Wir ziehen das $0{,}4$-fache der zweiten Zeile von der dritten Zeile ab:

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0{,}625 & 0{,}625 & 1{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75 & -2{,}5 & 16 & 1 \end{array}$$

Schritt 5. Wir dividieren die dritte Zeile durch $0{,}75$:

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0{,}625 & 0{,}625 & 1{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{64}{3} & \frac{4}{3} \end{array}$$

Hiermit ist die Matrix auf Zeilenstufenform. Wir erzeugen nun Nullen oberhalb der Diagonale links des Striches, indem wir zunächst zur zweiten Gleichung die dritte addieren und dann von der ersten das $0{,}625$-fache der dritten Gleichung abziehen:

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0{,}625 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{40}{3} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{56}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{64}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Im letzten Schritt wird von der ersten Gleichung das $0{,}625$-fache der zweiten Gleichung abgezogen:

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{56}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{64}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ ist also $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & -5/3 & 5/3 \\ 8/3 & -56/3 & 4/3 \\ -10/3 & 64/3 & 4/3 \end{pmatrix}$.

An diesem Beispiel sieht man, dass es in der Regel einfacher ist, ein LGS mithilfe des Gauss-Algorithmus zu lösen, als die inverse Matrix zu bestimmen.

3.6 Lösungsrechner im www

Zum Lösen von linearen Gleichungen gibt es schöne Anwendungen im www, mit denen man seine eigenen Rechnungen überprüfen kann. Zwei Beispiele sind

- zum Gauß-Algorithmus:
  http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/gleichungssysteme.htm
- zum Invertieren von Matrizen:
  http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/inversematrix.htm

3.7 Übungen

3.7.1 Lösen Sie die folgenden LGS.

a) $\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 &= 5 \\ 2x_2 &= -10 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 1{,}6x_1 &= -3{,}2 \\ -5{,}2x_1 - 5{,}2x_2 &= 5{,}2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} -15x_1 - 8x_2 &= -3{,}5 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -5{,}5 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} -1{,}8x_1 - 1{,}2x_2 &= 6 \\ -6{,}3x_1 - 5{,}6x_2 &= -5{,}6 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 2{,}5x_1 + 2{,}5x_2 &= 25 \\ x_1 + x_2 &= 10 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 8x_1 - 4x_2 &= 9 \\ -4x_1 + 2x_2 &= -5 \end{aligned}$

d)
$$\begin{aligned} -7{,}2x_1 &+ 6x_2 = 0 \\ 3{,}6x_1 &- 3{,}6x_2 = -9 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 0{,}8x_1 &- 0{,}4x_2 = 3{,}6 \\ 5{,}1x_1 &- 3{,}4x_2 = 37{,}4 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} -2{,}4x_1 &- 3{,}2x_2 = 21{,}6 \\ -5{,}4x_1 &- 3{,}6x_2 = -5{,}4 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} -5x_1 &+ 11x_2 = -13 \\ 12{,}5x_1 &- 27{,}5x_2 = 32{,}5 \end{aligned}$$

3.7.2 Lösen Sie die folgenden LGS.

a)
$$\begin{aligned} -6x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= -6 \\ x_2 &= 17 \\ -3x_1 - 2x_2 &= 17 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} - 3x_2 + 4{,}5x_3 &= 21 \\ - 0{,}7x_2 + 1{,}4x_3 &= -11{,}2 \\ -2{,}4x_1 + 2{,}4x_2 - 4{,}8x_3 &= -2{,}4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ -1{,}2x_1 - 0{,}6x_2 - 0{,}3x_3 &= -2{,}1 \\ x_2 + 2x_3 &= -13 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_3 &= -8 \\ 3x_1 + 3x_2 &= -21 \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 0{,}8x_1 - x_2 + 0{,}2x_3 &= 1{,}2 \\ -4{,}5x_1 + 5{,}4x_2 - 2{,}7x_3 &= -8{,}1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} -11{,}2x_1 - 2{,}8x_2 &= 5{,}6 \\ 5{,}5x_1 + 3{,}3x_2 + 9{,}9x_3 &= 0 \\ -2{,}25x_1 + 0{,}75x_2 + 6{,}75x_3 &= 3 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 3{,}9x_1 + 11{,}7x_3 &= 9{,}75 \\ 3{,}2x_2 - 0{,}8x_3 &= -6 \\ 5{,}7x_1 + 15{,}2x_3 &= -5{,}7 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} -4{,}5x_1 - 6x_2 &= -18 \\ -2{,}1x_1 - 4{,}2x_2 &= 4{,}2 \\ -1{,}5x_1 - 2x_2 - 0{,}5x_3 &= -10{,}5 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} -2{,}1x_1 - 2{,}8x_2 - 4{,}2x_3 &= 0{,}7 \\ - 0{,}4x_2 - 0{,}8x_3 &= 4{,}8 \\ -1{,}8x_1 - 1{,}8x_2 - 3{,}6x_3 &= -12{,}6 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 6 \\ 7x_1 - 3{,}5x_2 - 10{,}5x_3 &= -6 \\ 3x_1 - 0{,}5x_2 - 5{,}5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

3.7.3 Lösen Sie die folgenden LGS.

a)
$$\begin{aligned} 6x_2 - 5x_4 &= 37{,}5 \\ 10x_1 + 2x_2 &= 20 \\ -8x_1 - 3x_3 &= 10 \\ 7x_1 + 3x_3 &= -8 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_4 &= -17{,}5 \\ -4x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 8x_4 &= 2 \\ -x_1 &= 18{,}5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_4 &= 11 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -12x_1 & & & - & 3x_3 & + & 16x_4 & = & 5 \\ 8x_1 & - & 18x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 8x_4 & = & -7{,}5 \\ & - & 3x_2 & & & + & 4x_4 & = & -11{,}5 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -4x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & & & = & 10 \\ -4x_1 & - & 4x_2 & & & + & 2x_4 & = & -12 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & = & -8 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -5x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & & & = & 9 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 1x_3 & + & 9x_4 & = & 30 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 16 \end{array}$$

3.7.4 Lösen Sie die folgenden LGS, indem Sie die Koeffizientenmatrix invertieren.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -3{,}2 & 4{,}8 & -1{,}6 \\ 3{,}2 & -6{,}4 & 3{,}2 \\ -1{,}6 & -3{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 2{,}8 \\ -4{,}9 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1{,}6 & 1{,}8 & 1 \\ 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & -0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1{,}6 & 1{,}6 & 3{,}2 \\ -1{,}6 & 1{,}6 & -0{,}8 \\ 0 & 3{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 5 & -2{,}5 & 1{,}25 \\ -1{,}25 & 6{,}25 & 1{,}25 \\ 6{,}25 & 3{,}75 & 3{,}75 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 1{,}2 & 1{,}2 & 0{,}4 \\ -1{,}2 & 0{,}8 & -0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -0{,}25 & 0{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}375 & 0{,}125 & -0{,}125 \\ 0{,}125 & 0 & -0{,}125 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -0{,}4 & -0{,}4 & -0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 1{,}2 \\ 0{,}2 & -1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} -0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & -0{,}2 & -0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

3.7.5 Für den täglichen Übergang zwischen drei Radstationen A, B und C aus Übung 1.4.5 mit der Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

stellt man am Abend eines Tages fest, dass sich in A 22 %, in B 48 % und in C 30 % der Fahrräder befinden. Berechnen Sie, wie die Fahrräder am Morgen des Tages verteilt waren.

3.7.6 In einer Gruppe von 10.000 Menschen finden sich 4.775 Nichtraucher, 1.780 Gelegenheitsraucher und 3.445 tägliche Raucher. Berechnen Sie die Anzahl der Nichtraucher, Gelegenheitsraucher und täglichen Raucher vor einem Jahr, wenn für die jährlichen Übergänge zwischen den Nichtrauchern, Gelegenheitsrauchern und täglichen Rauchern die Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}35 & 0{,}05 \\ 0{,}12 & 0{,}33 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}32 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

angenommen wird, siehe Übung 1.4.6.

3.7.7 Für eine Population von Insekten aus Übung 1.4.8 werden die Wahrscheinlichkeiten der Vererbung zweier sich ausschließender Merkmale A und B durch die Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

gegeben. In der F4-Generation findet man 1.575 Insekten mit Merkmal A und 2.425 Insekten mit Merkmal B. Ermitteln Sie, wie die Merkmale in der P-Generation verteilt waren.

3.7.8 Die Farbe (grün oder gelb) der Schoten einer Erbsenpflanze wird durch zwei Gene bestimmt, wobei das Gen G für grüne Farbe dominant und das Gen g für gelbe Farbe rezessiv ist. Damit sind folgende drei Genotypen möglich

- GG: beide Gene dominant, man spricht von reinerbig dominant
- Gg: ein Gen dominant, ein Gen rezessiv, man spricht von mischerbig
- gg: beide Gene rezessiv, man spricht von reinerbig rezessiv

Wird ein *mischerbiges Elternteil* mit einer sehr großen Population von Pflanzen beliebigen Genotyps gekreuzt, werden die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang „Genotyp 2. Elternteil“ $\rightarrow$ „Genotyp Nachkomme“ durch die Übergangsmatrix

$$\begin{array}{cc} & \text{von} \\ & \begin{array}{ccc} \text{GG} & \text{Gg} & \text{gg} \end{array} \\ \text{nach} \begin{array}{c} \text{GG} \\ \text{Gg} \\ \text{gg} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

gegeben, siehe Übung 1.4.9. Unter den Nachkommen haben 50 % den Genotyp Gg und 30 % den Genotyp gg. Berechnen Sie die Verteilung der Genotypen in der Generation, die mit der mischerbigen Pflanze gekreuzt wurde.

3.7.9 Werden in der Situation der vorstehenden Übung als erstes Elternteil nur reinerbig dominante Erbsen verwendet, werden die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang „Genotyp 2. Elternteil“ $\rightarrow$ „Genotyp Nachkomme“ durch die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, siehe wiederum Übung 1.4.9. In diesem Fall gibt es unter den Nachkommen keine Erbsen mit Genotyp gg.

a) Unter den Nachkommen haben 83 % den Genotyp Gg. Berechnen Sie die Verteilung der Genotypen unter den Pflanzen des zweiten Elternteils.
b) Es sei eine beliebige Verteilung der Genotypen vorgegeben, wobei der 0 % der Pflanzen den Genotyp gg haben sollen. Bestimmen Sie alle möglichen Verteilungen für die Genotypen unter den Pflanzen des zweiten Elternteils, sodass durch Kreuzung unter den Nachkommen die vorgegebene Verteilung entsteht.

4 Gleichgewichtsverteilungen bei mehrstufigen Prozessen

4.1 Situationsbeschreibung: Zum letzten Mal Rent-a-Bike

Die Betreiber der Fahrradvermietung Rent-a-Bike sind natürlich daran interessiert, den Aufwand für den Transport von Fahrrädern zwischen den einzelnen Stationen soweit wie möglich zu minimieren. Deshalb ist es für sie sinnvoll, eine morgendliche Verteilung der Fahrräder zu finden, die sich abends unverändert wieder einstellt: Wir die Verteilung durch den Vektor $\vec{x}$ dargestellt, muss also $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gelten. Dies ist natürlich für den Nullvektor der Fall (das heißt, es werden keine Fahrräder bereitgehalten). Dies ist natürlich ein Fall, der in Anwendungen in der Regel nicht von Interesse ist: Die Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ soll also vom Nullvektor verschieden sein.

4.2 Fixvektoren und Gleichgewichtsverteilungen von stochastischen Matrizen

---

Definition. Jeder *vom Nullvektor verschiedene* Vektor $\vec{x}$, für den $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt, heißt **Fixvektor** der Matrix A.
Wenn A eine stochastische Matrix und der Fixvektor $\vec{x}$ ein Verteilungsvektor (*keine* der Komponenten von $\vec{x}$ ist negativ) ist, dann heißt $\vec{x}$ auch **Gleichgewichtsverteilung**.[3] Ist $\vec{x}$ zusätzlich ein stochastischer Verteilungsvektor (die Summe aller Komponenten ist 1), so sprechen wir von einer **stochastischen Gleichgewichtsverteilung**

Bei der Suche nach einer Gleichgewichtsverteilung kann man sich immer auf den Spezialfall einer stochastischen Gleichgewichtsverteilung beschränken. Will man dann wissen, wie man eine bestimmte Anzahl an Objekten so auf die Zustände verteilen muss, dass die Verteilung sich unter der Matrix A nicht ändert, multipliziert man die stochastische Gleichgewichtsverteilung einfach mit der Anzahl der Objekte.

In der Rent-a-Bike-Situation ist also eine stochastische Gleichgewichtsverteilung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix}$$

zu finden. Dafür muss das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0,12 & 0,05 & 0,1 \\ 0,08 & 0,45 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gelöst werden. Wir schreiben das Gleichungssystem mit drei Gleichungen auf:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 0,8x_1 & + & 0,5x_2 & + & 0,5x_3 & = & x_1 \\ \text{II} & 0,12x_1 & + & 0,05x_2 & + & 0,1x_3 & = & x_2 \\ \text{III} & 0,08x_1 & + & 0,45x_2 & + & 0,4x_3 & = & x_3 \end{array}$$

Wir bringen zunächst in jeder Gleichung die Unbekannten alle auf die linke Seite:

---

[3] Ein anderer gebräuchlicher Name ist **stationäre Verteilung**.

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{I} & -0,2x_1 & + & 0,5x_2 & + & 0,5x_3 & = & 0 \\ \text{II} & 0,12x_1 & + & -0,95x_2 & + & 0,1x_3 & = & 0 \\ \text{III} & 0,08x_1 & + & 0,45x_2 & + & -0,6x_3 & = & 0 \end{array}$$

Nun können wir feststellen, dass in diesem Gleichungssystem eine Nullzeile erzeugt werden kann: Zuerst addieren wir die dritte Zeile zu ersten:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{I} & -0,12x_1 & + & 0,95x_2 & + & -0,1x_3 & = & 0 \\ \text{II} & 0,12x_1 & + & -0,95x_2 & + & 0,1x_3 & = & 0 \\ \text{III} & 0,08x_1 & + & 0,45x_2 & + & -0,6x_3 & = & 0 \end{array}$$

und dann addieren wir die zweite Zeile zu der ersten:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{I} & & & & & 0 & = & 0 \\ \text{II} & 0,12x_1 & + & -0,95x_2 & + & 0,1x_3 & = & 0 \\ \text{III} & 0,08x_1 & + & 0,45x_2 & + & -0,6x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aus der Lösungstheorie für LGS ergibt sich dann, dass dieses Gleichungssystem mindestens eine und sogar unendlich viele Lösungen hat. Dies gilt auch ganz allgemein:

Satz.
Bei jeder stochastischen Übergangsmatrix kann man im Gleichungssystem zur Bestimmung der Fixvektoren durch Addition von Vielfachen der anderen Zeilen stets die erste Zeile (oder auch jede der anderen Zeilen!) zu einer Nullzeile machen, bei der auch die rechte Seite Null ist.

Die Lösungstheorie für lineare Gleichungssysteme sagt dann sofort:

Satz. (Existenz von Fixvektoren bei stochastischen Matrizen)
Jede stochastische Matrix hat unendlich viele Fixvektoren.

Im vorliegenden Kontext interessieren uns aber nur spezielle Fixvektoren, nämlich solche, die stochastische Verteilungsvektoren sind, bei der also die Summe der Komponenten 1 ist: $x_1+x_2+x_3=1$. Wir tragen dies in die erste Zeile des LGS ein:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ \text{II} & 0,12x_1 & + & -0,95x_2 & + & 0,1x_3 & = & 0 \\ \text{III} & 0,08x_1 & + & 0,45x_2 & + & -0,6x_3 & = & 0 \end{array}$$

und bringen dieses LGS auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{rccccccc} \text{I} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ \text{II} & & & x_2 & + & \frac{2}{107}x_3 & = & \frac{12}{107} \\ \text{III} & & & & & -\frac{147}{214}x_3 & = & -\frac{13}{107} \end{array}$$

Hieraus ergeben sich die Lösungen

- $x_3=\frac{13}{107}:\frac{147}{214}=\frac{26}{147}$
- $x_2=\frac{12}{107}-\frac{2}{107}\cdot\frac{26}{147}=\frac{16}{147}$

- $x_1 = 1 - \frac{26}{147} - \frac{16}{147} = \frac{5}{7}$.

Dies bedeutet:

- $\frac{26}{147}$ aller Fahrräder sind in Station C zu platzieren;
- $\frac{16}{147}$ aller Fahrräder sind in Station B aufzustellen;
- $\frac{5}{7}$ aller Fahrräder sind in Station A zu deponieren.

Durch Multiplikation der stochastischen Gleichgewichtsverteilung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 16/147 \\ 26/147 \end{pmatrix}$$

mit der Anzahl der Fahrräder ergibt sich, wie die Fahrräder auf die Stationen zu verteilen sind:

$$100 \cdot \begin{pmatrix} 5/7 \\ 16/147 \\ 26/147 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \cdot 5/7 \\ 100 \cdot 16/147 \\ 100 \cdot 26/147 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 71 \\ 11 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Die insgesamt 100 Fahrräder müssen also wie folgt verteilt werden: 71 Fahrräder in Station A, 11 Fahrräder in Station B und 18 Fahrräder in Station C.

Wir halten nochmals **die drei wichtigsten Schritte bei der Bestimmung der stochastischen Gleichgewichtsverteilung** fest:

Schritt 1. Bringe im Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ alle Unbekannten auf die linke Seite.

Schritt 2. Ersetze im entstehenden Gleichungssystem eine der Zeilen durch die Zeile $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Schritt 3. Löse das entstehende Gleichungssystem.

Es soll nun noch die Frage geklärt werden, wie viele Lösungen das Gleichungssystem, dessen Lösung Schritt 3 verlangt, überhaupt hat.

4.3 Existenz und Eindeutigkeit von stochastischen Gleichgewichtsverteilungen

Im vorliegenden Fall haben wir eine stochastische Gleichgewichtsverteilung gefunden. Frage: Gibt es bei jeder stochastischen Matrix eine stochastische Gleichgewichtsverteilung? Antwort: Ja!

> **Satz. (Existenz von Gleichgewichtsverteilungen)**
> Jede stochastische Matrix hat mindestens eine stochastische Gleichgewichtsverteilung.

Im Fall von Rent-a-Bike gibt es neben der von uns gefunden *keine weitere* stochastische Gleichgewichtsverteilung (diese müsste nämlich auch eine Lösung des Gleichungssystems sein). Das muss nicht immer so sein: Zum Beispiel hat die stochastische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

(die Zahlen der dritten Spalte können völlig beliebig sein, solang sie nicht negativ und mit Summe 1 sind) die stochastischen Gleichgewichtsverteilungen

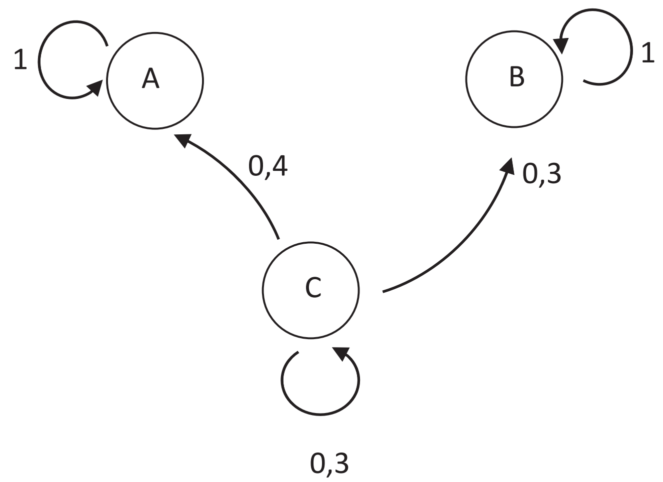
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist sogar jeder der Vektoren

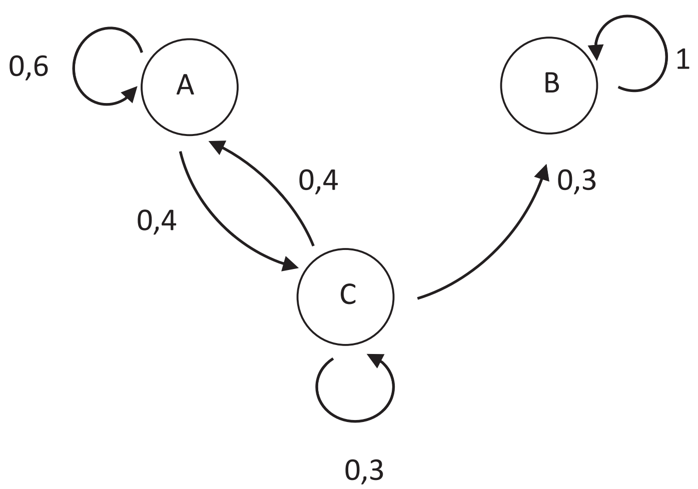
$$\begin{pmatrix} x \\ 1-x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \le x \le 1$$

eine stochastische stationäre Gleichgewichtsverteilung von A.

Diese Mehrdeutigkeit kommt dadurch zu Stande, dass es bei dem durch A bestimmten mehrstufigen Prozess keinen Zustand gibt, den man im Gozintograph von jedem anderen Zustand aus über Kanten mit positiver Wahrscheinlichkeit erreichen kann:



Hier kann A nicht von B aus, B nicht von A aus und C kann sogar von keinem anderen Zustand aus erreicht werden.
Wir modifizieren den Prozess, indem wir einen Übergang von Zustand A nach C zulassen:



Nun kann der Zustand B von allen anderen Zuständen aus erreicht werden. Die zu diesem Prozess gehörende stochastische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

hat nur eine stochastische Gleichgewichtsverteilung, nämlich

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies gilt auch ganz allgemein:

> **Satz. (Eindeutige Existenz der Gleichgewichtsverteilung)**
> Ein mehrstufiger Prozess mit stochastischer Übergangsmatrix hat genau dann *nur eine* stochastische Gleichgewichtsverteilung, wenn es mindestens einen Zustand gibt, der von allen anderen Zuständen aus erreichbar ist.

4.4 Konvergenz gegen die Gleichgewichtsverteilung

Für die Rent-a-Bike-Situation hatten wir die stochastische Gleichgewichtsverteilung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 16/147 \\ 26/147 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}7143 \\ 0{,}1088 \\ 0{,}1769 \end{pmatrix}$$

ausgerechnet. Sind die Fahrräder auf diese Weise morgens auf die drei Stationen verteilt, so stellt sich abends auch genau diese Verteilung wieder ein. Wir hatten vorher argumentiert, dass man bei einer anderen Startverteilung gegebenenfalls über Nacht Fahrräder zwischen den Stationen transportieren muss, um für den nächsten Tag wieder eine sinnvolle Startverteilung haben zu können.

Ist dies wirklich so? Wir wollen anhand eines Beispiels untersuchen, was im Lauf der Zeit passiert, wenn wir mit einer beliebigen Startverteilung beginnen und jeweils die Verteilung, die am Abend eintritt, für den nächsten Morgen einfach beibehalten. Wir wissen bereits, dass wir die Verteilung nach einem, zwei, drei, allgemein nach n Tagen erhalten, indem wir die n-te A^n Potenz der Übergangsmatrix A mit der Startverteilung multiplizieren.

Wir wählen zunächst als Startverteilung

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das heißt, alle Fahrräder befinden sich zu Beginn in Station A. Personen, die am ersten Morgen von einer der anderen Stationen ein Fahrrad mieten wollen, müssten also warten, bis ein bei Station A gemietetes Fahrrad dort abgegeben wird. Mithilfe eines Computers ergeben sich – auf vier Stellen hinter dem Komma gerundet –die folgenden Werte:

n	$A^n \cdot \vec{y}$

n	$A^n \cdot \vec{y}$

1	$\begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,12 \\ 0,08 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0,74 \\ 0,11 \\ 0,15 \end{pmatrix}$

5	$\begin{pmatrix} 0,715 \\ 0,1089 \\ 0,1769 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 0,7143 \\ 0,1088 \\ 0,1769 \end{pmatrix}$

Es fällt auf, dass die Verteilungen sich der Gleichgewichtsverteilung immer weiter annähern. Nach 10 Tagen ist – wenn man auf vier Stellen rundet – schon kein Unterschied zur Grenzverteilung mehr zu sehen.

Wenn man riskieren will, gegebenenfalls Kunden an den Stationen B und C zu verärgern, könnte man mit dieser Verteilung starten. Die Gleichgewichtsverteilung wird sich nach etwa 10 Tagen automatisch einstellen. Verteilt man die Fahrräder zu Beginn gleichmäßiger auf die Stationen, indem man als Startverteilung zum Beispiel

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

wählt, ergeben sich die folgenden Werte:

n	$A^n \cdot \vec{y}$
1	$\begin{pmatrix} 0,62 \\ 0,093 \\ 0,287 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0,686 \\ 0,1078 \\ 0,2063 \end{pmatrix}$

n	$A^n \cdot \vec{y}$
5	$\begin{pmatrix} 0,7135 \\ 0,1088 \\ 0,1777 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 0,7143 \\ 0,1088 \\ 0,1769 \end{pmatrix}$

Wiederum hat sich nach 10 Schritten automatisch die Gleichgewichtsverteilung eingestellt.

Allgemein kann man beweisen:

Satz. (Konvergenz gegen die Gleichgewichtsverteilung)
Es sei A die (stochastische) Übergangsmatrix eines mehrstufigen Prozesses.
Gibt es dann ein k, sodass A^k eine *Zeile* hat, in der *alle* Einträge *strikt* positiv sind, so sind alle Komponenten von $\vec{x}$ strikt positiv, und für *jede* stochastische Startverteilung $\vec{y}$ konvergiert die Folge $A \cdot \vec{y}, A^2 \cdot \vec{y}, A^3 \cdot \vec{y}, \ldots$ gegen die stochastische Gleichgewichtsverteilung $\vec{x}$: Für alle hinreichend großen n ist $A^n \cdot \vec{y} \approx \vec{x}$, und der Unterschied von $A^n \cdot \vec{y}$ zu $\vec{x}$ wird – sofern n groß genug ist – immer kleiner, wenn n größer wird.


Wolfgang Doeblin

Die Bedingung, dass es ein k gibt, sodass A^k eine Zeile hat, in der alle Einträge strikt positiv sind, heißt **Doeblin-Bedingung**. Sie bedeutet, dass es einen Zustand Z gibt, sodass man im Gozintographen von jedem Zustand aus über genau k Knoten (diese müssen nicht verschieden sein) entlang von Kanten mit positiven Wahrscheinlichkeiten nach Z gelangen kann. Mit anderen Worten: Ein Objekt, das sich zu Beginn in irgendeinem Zustand befindet, kann mit positiver Wahrscheinlichkeit nach genau k Übergängen in Z landen.

Die Doeblin-Bedingung ist benannt nach dem Mathematiker Wolfgang Doeblin (1915- 1940), einem Sohn des Schriftstellers Alfred Döblin. Wolfgang Doeblin emigrierte in den dreißiger Jahren nach Frankreich und erhielt dort die französische Staatsbürgerschaft. Im Krieg von Frankreich eingezogen wurde sein Bataillon im Juni 1940 von deutschen Truppen eingenommen. Auf der Flucht wählte Doeblin den Freitod. Wenige Monate vor seinem Tod – im Februar 1940 – hinterlegte Doeblin seine neuesten mathematischen Resultate in einem versiegelten Brief bei der Académie des Sciences in Paris. Der Brief wurde erst im Jahr 2000 geöffnet. Die Aufzeichnungen Doeblins nehmen bedeutende Resultate vorweg, die von anderen erst in der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts (wieder-)gefunden wurden.

4.5 Übungen

4.5.1 Berechnen Sie, wie die Fahrräder an den drei Radstationen A, B und C aus Übung 1.4.5 mit der Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

die Fahrräder verteilt werden müssen, damit die Verteilung der Fahrräder sich nicht ändert. Begründen Sie auch, warum es nur eine stochastische Gleichgewichtsverteilung geben kann.

4.5.2 In Übung 1.4.6 waren für eine Gruppe von Menschen die Wahrscheinlichkeiten für jährliche Übergänge zwischen den Nichtrauchern, Gelegenheitsrauchern und täglichen Rauchern durch die Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,35 & 0,05 \\ 0,12 & 0,33 & 0,1 \\ 0,08 & 0,32 & 0,85 \end{pmatrix}$$

angegeben worden. Begründen Sie, dass es nur eine stochastische Gleichgewichtsverteilung geben kann, und berechnen Sie diese. Bestimmen Sie dann, wie viele der 10.000 Menschen der Gruppe nach längerer Zeit Nichtraucher, Gelegenheitsraucher und täglichen Raucher sein werden. (Hierbei gehen wir davon aus, dass niemand aus der Gruppe stirbt.)

4.5.3 In einem sehr einfachen Modell des Wetters in Bonn wird davon ausgegangen, dass ein Tag entweder regnerisch oder trocken ist, wobei die Wahrscheinlichkeiten für die täglichen Übergänge durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,25 \\ 0,34 & 0,75 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, siehe Übung 1.4.7 und Übung 2.4.10. Berechnen Sie hiermit, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Tag in Bonn regnerisch oder trocken ist.
Hinweis. Wenn x_r die Wahrscheinlichkeit für einen regnerischen Tag und x_t die Wahrscheinlichkeit für einen trockenen Tag ist, so muss $A\cdot\begin{pmatrix} x_r \\ x_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_r \\ x_t \end{pmatrix}$ und $x_r + x_t = 1$ gelten.

4.5.4 Für eine Population von Insekten aus Übung 1.4.8 werden die Wahrscheinlichkeiten der Vererbung zweier sich ausschließender Merkmale A und B durch die Übergangsmatrix

$$A=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie, auf welche Werte wird sich das Verhältnis von Trägern des Merkmals A zu den Trägern des Merkmals B langfristig einstellen wird.

4.5.5 Die Farbe (grün oder gelb) der Schoten einer Erbsenpflanze wird durch zwei Gene bestimmt, wobei das Gen G für grüne Farbe dominant und das Gen g für gelbe Farbe rezessiv ist. Wird ein *mischerbiges Elternteil* mit einer sehr großen Population von Pflanzen beliebigen Genotyps gekreuzt, werden die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang „Genotyp 2. Elternteil" $\rightarrow$ „Genotyp Nachkomme" durch die Übergangsmatrix

$$\begin{array}{ccc} & & \text{von} \\ & & \begin{array}{ccc} \text{GG} & \text{Gg} & \text{gg} \end{array} \\ \text{nach} & \begin{array}{c} \text{GG} \\ \text{Gg} \\ \text{gg} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

gegeben, siehe Übung 1.4.9.

a) Begründen Sie anhand der im Lehrtext mitgeteilten Resultate über die Existenz von Gleichgewichtsverteilungen, dass es genau eine stochastische Gleichgewichtsverteilung gibt, und berechnen Sie diese.
b) Über mehrere Generationen hinweg wird nun jeweils die Population der Nachkommen erneut mit einem mischerbigen Elternteil gekreuzt. Begründen Sie anhand der im Lehrtext mitgeteilten Resultate, dass sich die Verteilung der Genotypen in den Nachkommen nach oftmaliger Kreuzung mit einem mischerbigen Elternteil nicht mehr ändert, und geben Sie an, welche wie hoch der Anteile der reinerbig dominanten, der mischerbigen und der reinerbig rezessiven Pflanzen in den Nachkommen schließlich sein werden.

4.5.6 Werden in der Situation der vorstehenden Übung als erstes Elternteil nur reinerbig dominante Erbsen verwendet, werden die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang „Genotyp 2. Elternteil" $\rightarrow$ „Genotyp Nachkomme" durch die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, siehe wiederum Übung 1.4.9. In diesem Fall gibt es unter den Nachkommen keine Erbsen mit Genotyp gg.

a) Begründen Sie anhand der im Lehrtext mitgeteilten Resultate über die Existenz von Gleichgewichtsverteilungen, dass es genau eine stochastische Gleichgewichtsverteilung gibt, und berechnen Sie diese.

b) Auch in der vorliegenden Situation wird über mehrere Generationen hinweg jeweils die Population der Nachkommen erneut mit einem reinerbig dominanten Elternteil gekreuzt. Begründen Sie anhand der im Lehrtext mitgeteilten Resultate, dass sich die Verteilung der Genotypen in den Nachkommen nach oftmaliger Kreuzung mit einem reinerbig dominanten Elternteil nicht mehr ändert, und geben Sie an, wie hoch der Anteile der reinerbig dominanten, der mischerbigen und der reinerbig rezessiven Pflanzen in den Nachkommen schließlich sein werden.

4.6 Eine Anwendung: Google's PageRank-Algorithmus

Seit September 1998 ist die Suchmaschine Google online. Sie wird betrieben von der Firma Google Inc., die von Larry Page und Sergei Brin, zwei ehemaligen Informatik-Studenten an der Stanford University, im Jahr 1998 gegründet wurde.

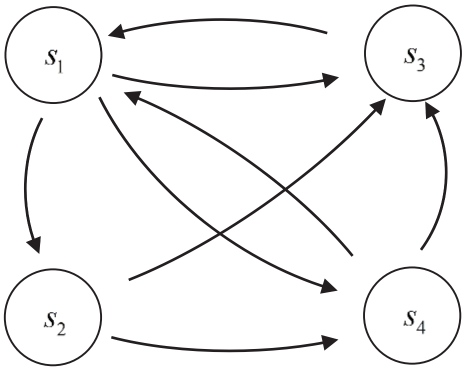
Besonders in den ersten Jahren - mittlerweile haben die Konkurrenten sich verbessert – zeichnete sich Google dadurch aus, dass die zu einem Suchbegriff gefundenen Internetseiten nicht in mehr oder weniger zufälliger Reihenfolge aufgelistet werden. Die Suchergebnisse werden vielmehr in einer Reihenfolge präsentiert, die der Wichtigkeit der Seiten entspricht. Google verwendet hierzu den von Page und Brin noch an der Stanford University entwickelten Algorithmus **PageRank**.
PageRank basiert im Wesentlichen darauf, dass jeder Seite des www ein Gewicht, dessen Wert zwischen 0 und 1 liegt, zugemessen wird. Anschaulich soll das Gewicht einer Seite s im www dem Anteil der Surfer entsprechen, die „im Schnitt" zu einem bestimmten Zeitpunkt auf s sind. Für die Berechnung des Gewichtes wird davon ausgegangen, dass ein Surfer auf die Seite s gerät, indem er sich zuvor auf einer anderen Seite befindet, die einen Link *auf* s hat. Auf dieser Seite hat er den Link auf die Seite s ausgewählt und ist so auf s gelangt.

Jeder Surfer wählt in diesem Modell auf der Seite, auf der er sich befindet, einen der Links der Seite aus und folgt diesem auf eine neue Internetseite. Betrachtet man die Gesamtheit der Surfer, so geht man davon aus, dass jeder der Links einer Seite von einer etwa gleich großen Anzahl der Surfer ausgewählt wird. Das Gewicht/ Die Anzahl der Surfer einer Seite teilt sich also gleichmäßig auf die Seiten auf, auf die diese Seite verlinkt ist. Formal bedeutet dies: Hat eine Seite s das Gewicht x_s, und hat sie Links auf n_s andere Seiten[4], so überträgt sie den Wert x_s/n_s auf jede dieser anderen Seiten.

Die Frage ist: Wie können die Gewichte berechnet werden?

Wir betrachten zur Veranschaulichung zunächst ein einfaches, kleines www, das aus nur vier Seiten s_1, s_2, s_3, s_4 besteht. Im folgenden Graphen bedeutet ein Pfeil zwischen zwei Knoten, dass ein Link von der ersten auf die zweite Internetseite zeigt.

[4] Links, die von einer Seite ausgehen, werden im Folgenden auch als **Outlinks** bezeichnet.



Für die Gewichte der Seiten schreiben wir kurz x_1 statt x_{s_1} usw.

Das Gewicht der Seite s_1 ergibt sich aus den Gewichten der Seiten, die auf sie verlinken. Dies sind s_3 und s_4. Da von s_3 nur ein Link ausgeht, erhält s_1 das gesamte Gewicht dieser Seite; da von s_4 zwei Links ausgehen, erhält s_1 die Hälfte des Gewichtes von s_4: $x_1 = x_3 + 1/2\,x_4$.

Auf die Seite s_2 verlinkt nur die Seite s_1. Da s_1 drei Outlinks hat, erhält s_2 ein Drittel des Gewichts von s_1: $x_2 = 1/3\,x_1$.

Die Seite s_3 erhält Links von allen drei anderen Seiten. Durch Zählen der Oulinks jeder Seite erhält an für das Gewicht von Seite s_3 die Gleichung $x_3 = 1/3\,x_1 + 1/2\,x_2 + 1/2\,x_4$.

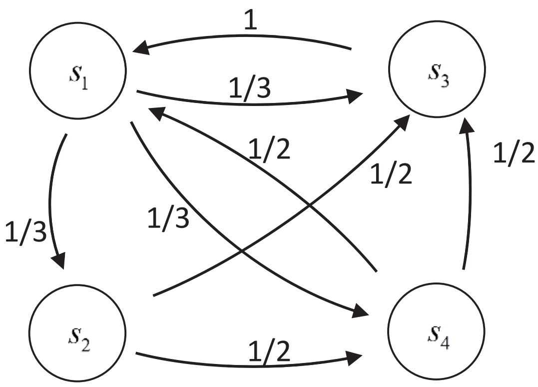
Ebenso ergibt sich für das Gewicht der Seite s_4: $x_4 = 1/3\,x_1 + 1/2\,x_2$.

Um die Gewichte der Seiten zu bestimmen, ist somit die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

zu lösen, und damit eine stochastische Gleichgewichtsverteilung für eine stochastische Matrix zu bestimmen!

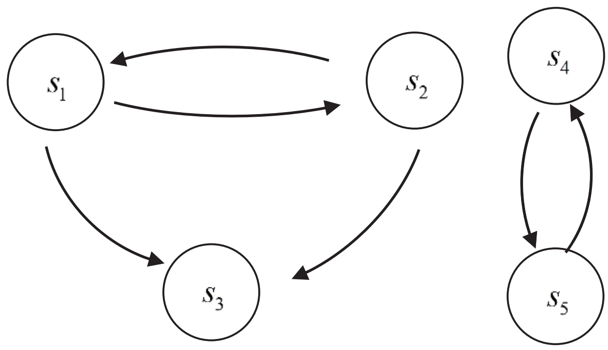
In der graphischen Darstellung des Webs entsprechen dann den Knoten und Kanten denen des Gozintographen dieser Matrix:



Da z.B. s_1 von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist, existiert in dieser Situation genau eine stationäre Gleichgewichtsverteilung. Diese ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/31 \\ 4/31 \\ 9/31 \\ 6/31 \end{pmatrix}.$$

Die Situation ist nicht immer so offensichtlich wie in diesem einfachen Fall, da nicht immer eine stochastische Matrix entstehen muss. Hierzu betrachten wir ein etwas größeres www mit fünf Seiten $s_1, s_2, \ldots, s_5$. Die Links zwischen den Seiten werden durch den folgenden Graphen wiedergegeben:



Als problematisch werden sich zwei Aspekte herausstellen:

- Das Netz zerfällt in Teilnetze, die nicht miteinander verbunden sind. Das eine Teilnetz bilden die Seiten s_1, s_2, s_3, das zweite Teilnetz bilden die Seiten s_4, s_5.
- Die Seite s_3 hat keinen Outlink.

In den Kontext der mehrstufigen Prozesse übertragen folgt aus dem ersten Aspekt, dass es keinen Zustand gibt, der von allen anderen aus erreichbar ist, sodass es keine eindeutige stationäre Gleichgewichtsverteilung geben kann!

Bilden wir wie eben wieder das Lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Gewichte, ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Nullspalte rührt daher, dass von Seite s_3 kein Link ausgeht. Die Matrix A ist also nicht stochastisch.

Eine Möglichkeit, dies für die weitere Berechnung zu beheben, besteht darin, der Seite s_3 einen Link auf jede der vier anderen Seiten künstlich hinzuzufügen. Inhaltlich entspricht dem, dass ein Surfer, der auf Seite s_3 gelangt, zufällig mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit eine der anderen Seiten zum Weitersufen auswählt. Die Matrix A wird damit zu

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Modifikation führt nun auch dazu, dass hier zum Beispiel die Seite s_5 von jeder anderen Seite aus erreichbar ist, sodass genau eine stochastische Gleichgewichtsverteilung existiert. Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

muss

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

diese Gleichgewichtsverteilung sein. Dies ist jedoch für die vorliegende Situation höchst unbefriedigend, da mehr als der Hälfte der Seiten des www das Gewicht Null zugewiesen würde.

Um diesen Problem abzustellen, haben Page und Brin die folgende Lösung ersonnen: Sie gehen davon aus, dass ein Surfer nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p den Links auf einer Seite folgt und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ im nächsten Schritt eine zufällig ausgewählte Internetseite ansteuert. Dies wird durch die Matrix

$$A_p = p \cdot A' + (1-p) \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & \cdots & 1/5 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/5 & \cdots & 1/5 \end{pmatrix}$$

ausgedrückt. Zu lösen ist dann das Gleichungssystem

$$A_p \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Google arbeitet nach unbestätigten Informationen mit $p = 0,85$. Im vorliegenden Fall erhalten wir hiermit

$$A_{0,85} = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,455 & 0,2425 & 0,03 & 0,03 \\ 0,455 & 0,03 & 0,2425 & 0,03 & 0,03 \\ 0,455 & 0,455 & 0,03 & 0,03 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 0,2425 & 0,03 & 0,88 \\ 0,03 & 0,03 & 0,2425 & 0,88 & 0,03 \end{pmatrix}.$$

Mit einem Computer findet man, dass das Gleichungssystem $A_{0,85} \cdot \vec{x} = \vec{x}$ die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 291/3155 \\ 291/3155 \\ 342/3155 \\ 2231/6310 \\ 2231/6310 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,09223 \\ 0,09223 \\ 0,1084 \\ 0,35357 \\ 0,35357 \end{pmatrix}$$

hat.

Es ist offensichtlich, dass das Lösen eines derartigen LGS sehr zeitaufwändig ist. In Realität müssen nun nicht nur fünf sondern mehrere Millionen Seiten in die Kalkulation einbezogen werden. Da die – zum Beispiel für $p = 0,85$ – entstehende Übergangsmatrix A_p aber die Doeblin-Bedingung erfüllt, kann die Gleichgewichtsverteilung auch gefunden werden, indem mit einer beliebigen Startverteilung $\vec{y}$ die Verteilungen $\vec{y}_1 = A_{0,85} \cdot \vec{y}$, $\vec{y}_2 = A_{0,85} \cdot \vec{y}_1$, $\vec{y}_3 = A_{0,85} \cdot \vec{y}_2$ usw. berechnet werden. Da, wie wir oben festgehalten haben, diese Verteilungen gegen die Gleichgewichtsverteilung $\vec{x}$ konvergieren, gilt $\vec{y}_n \approx \vec{x}$, wenn n groß genug ist. Bei typischen in der Praxis vorkommenden Werten ist diese Methode mehrere Millionen mal schneller als die Berechnung der Gleichgewichtsverteilung durch Lösen des LGS!

4.7 Literaturhinweise zum PageRank-Algorithmus

Für Interessierte seien ein Artikel und ein (Workshop-)Skript als Literaturhinweis zum PageRank-Algorithmus genannt. Die im Lehrtext mitgeteilten Informationen über den PageRank-Algorithmus entstammen größtenteils diesen Quellen.

Kurt Bryan, Tanya Leise: *The $25,000,000,000 Eigenvector. The Linear Algebra Behind Google*. Online abrufbar unter http://www.rose-hulman.edu/~bryan/googleFinalVersionFixed.pdf (Zugriff 13.07.2012)

Wolfgang Konen: *Google Explained: Eigenwerte, Graphen, Flüsse.* Online abrufbar unter http://www.gm.fh-koeln.de/~konen/Mathe2-SS2007/Workshop-Google/PageRank-Workshop2-ext.pdf (Zugriff 13.07.2012)